Δυναμική αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων και εφαρμογές στη Φυσική

Χρήστος Ευθυμιόπουλος

ΚΕΑΕΜ, Ακαδημία Αθηνών

Κίνητρο: πληθώρα των εφαρμογών

Επιταχυντές σωματιδίων

Μοριακή δυναμική (ερμηνεία της ταχύτητας αντιδράσεων)

Διάδοση παλμών (π.χ. οπτικών) σε μη-γραμμικά μέσα (σολιτόνια και πνοές)

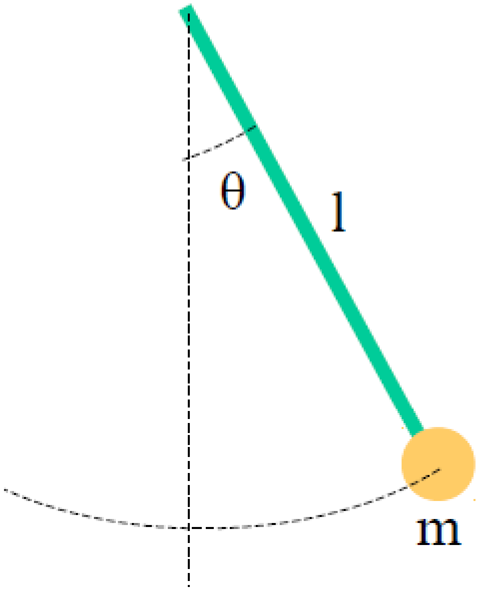
Αστροδυναμική (σχεδιασμός χαοτικών τροχιών διαστημοπλοίων)

Ουράνιος Μηχανική (σχηματισμός πλανητών - αστεροειδείς)

Σπειροειδής δομή σε γαλαξίες

Κοσμολογία (σκοτεινή ύλη)

Εκκρεμές με περιοδική διέγερση



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta = -\omega_0^2 \sin\theta$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2} - \omega_0^2 \cos\theta$$ (χαμιλτονιανή)

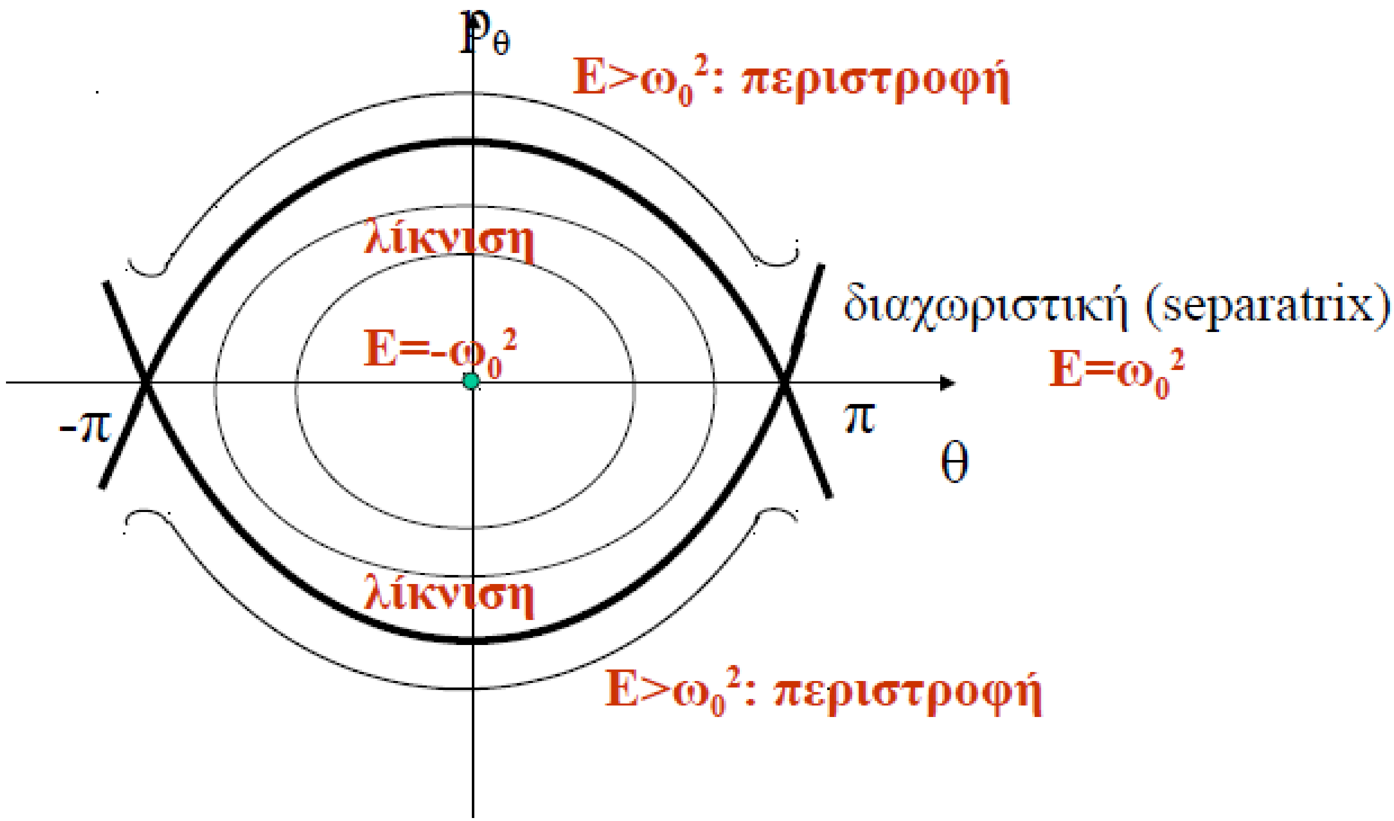
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = p_\theta, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

Εστω μεταβάλλουμε το μήκος **l** κατά μικρό ποσό **ε** περιοδικά, με συχνότητα **ω**

$$\boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2} - \omega_0^2 (1 + 2\varepsilon\cos\omega t)\cos\theta}$$

Φασικό πορτραίτο στην αδιατάρακτη περίπτωση (ε=0)

$$H=\frac{p_\theta^2}{2}-\omega_0^2\cos\theta=E\Rightarrow p_\theta=\pm\sqrt{2\left(E+\omega_0^2\cos\theta\right)}$$



Ορισμός:

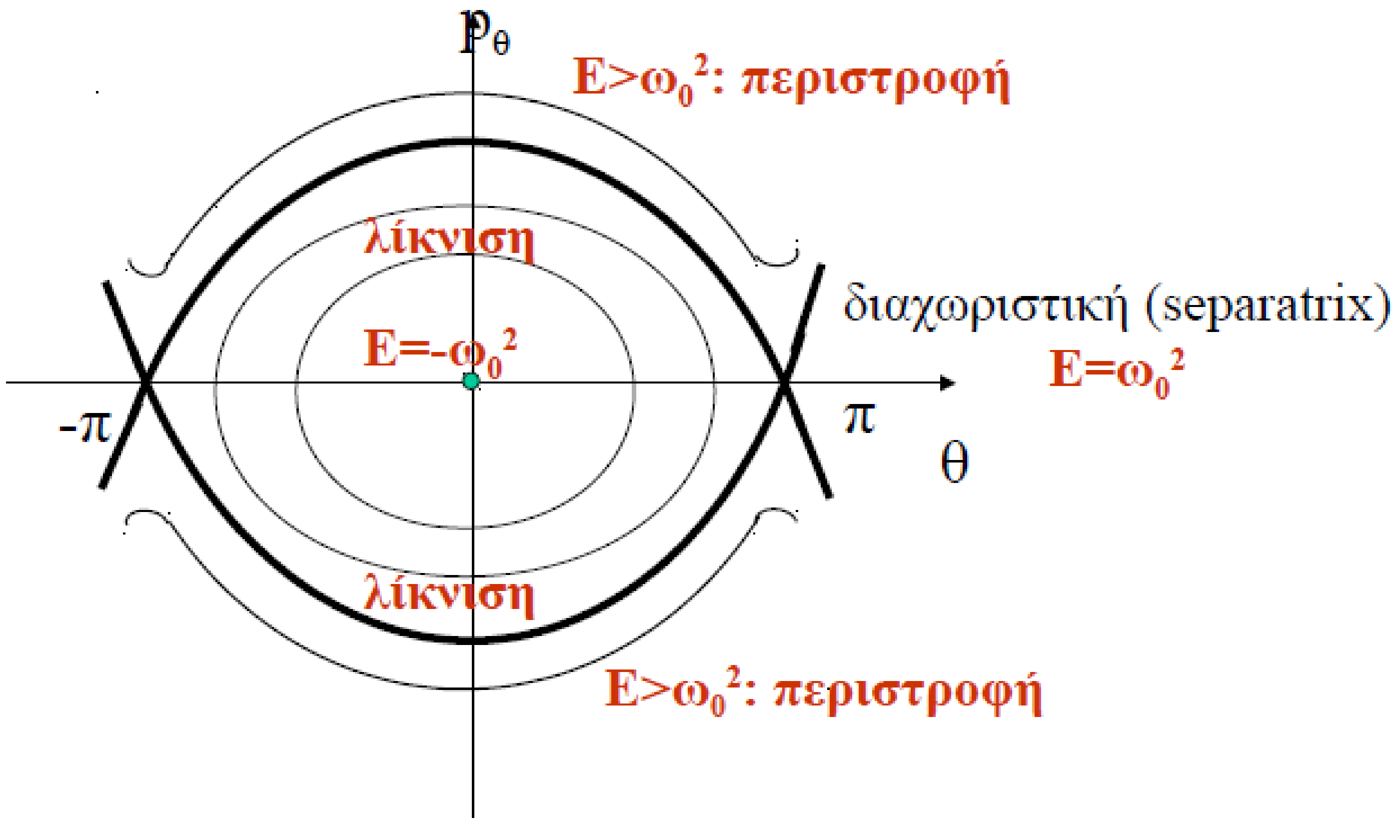
Εστω αναλλοίωτο υποσύνολο I του φασικού χώρου, σε σχέση προς το οποίο η "ροή" (εξισώσεις κίνησης) επιδέχεται διαχωρισμό σε κατευθύνσεις που περιλαμβάνουν "εγκαρσίως υπερβολικές" συνιστώσες.

$W_{\mathrm{I}}^{\mathrm{U}}$ = {Σύνολο αρχικών συνθηκών x(0): $\lim_{t\to-\infty}$ dis(x(t) - I) = 0}
$W_{\mathrm{I}}^{\mathrm{S}}$ = {Σύνολο αρχικών συνθηκών x(0): $\lim_{t\to\infty}$ dis(x(t) - I) = 0}

Παραδείγματα:
- Αναλλοίωτοι τόροι χαμηλής διάστασης (ασταθή σημεία ισορροπίας, ασταθείς περιοδικές τροχιές, κ.λ.π.)
- Εγκαρσίως Υπερβολικές Αναλλοίωτες Πολλαπλότητες
- Μη-ελκυστικά χαοτικά σύνολα ("χαοτικά σάγματα")

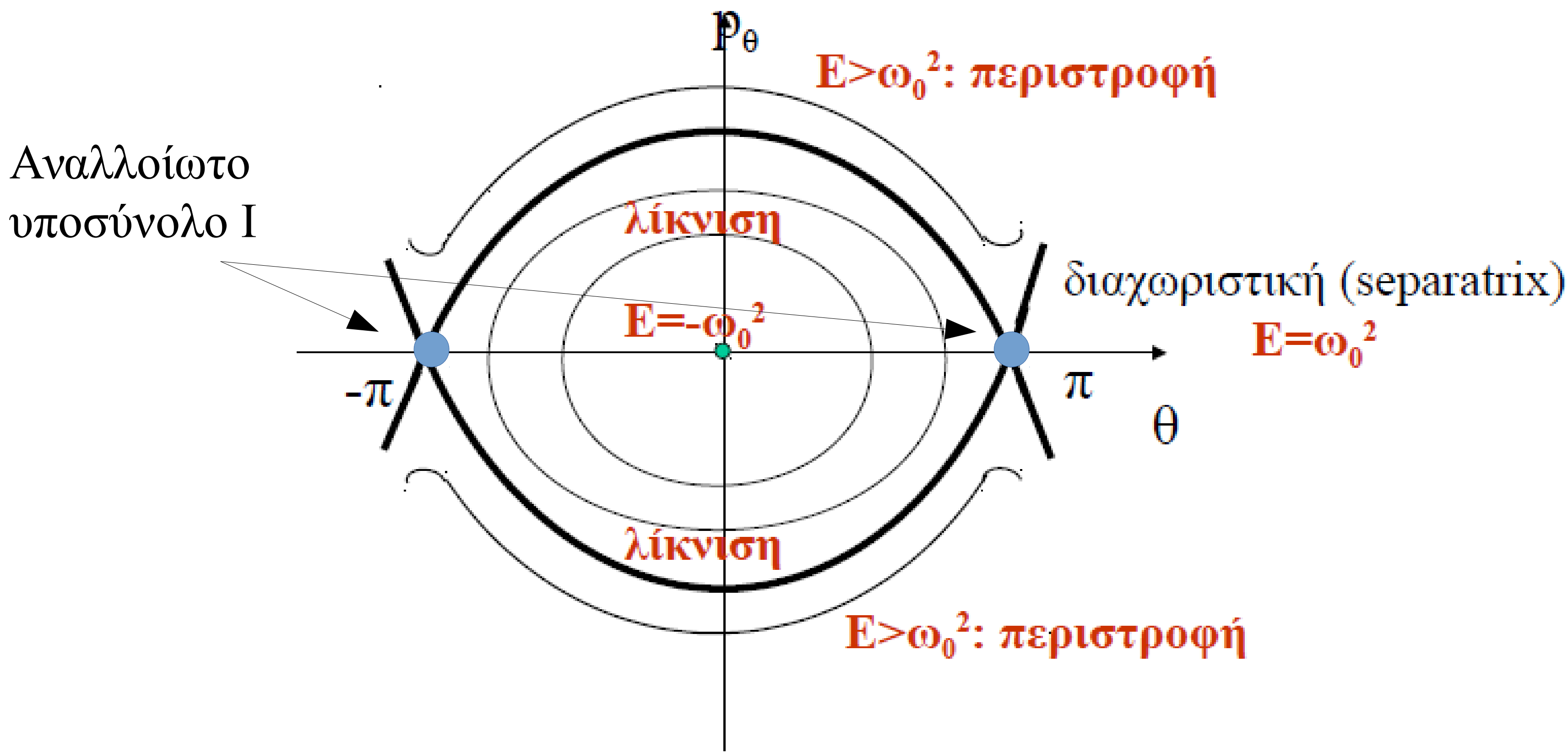
Φασικό πορτραίτο στην αδιατάρακτη περίπτωση (ε=0)

$$H=\frac{p_\theta^2}{2}-\omega_0^2\cos\theta=E\Rightarrow p_\theta=\pm\sqrt{2\left(E+\omega_0^2\cos\theta\right)}$$



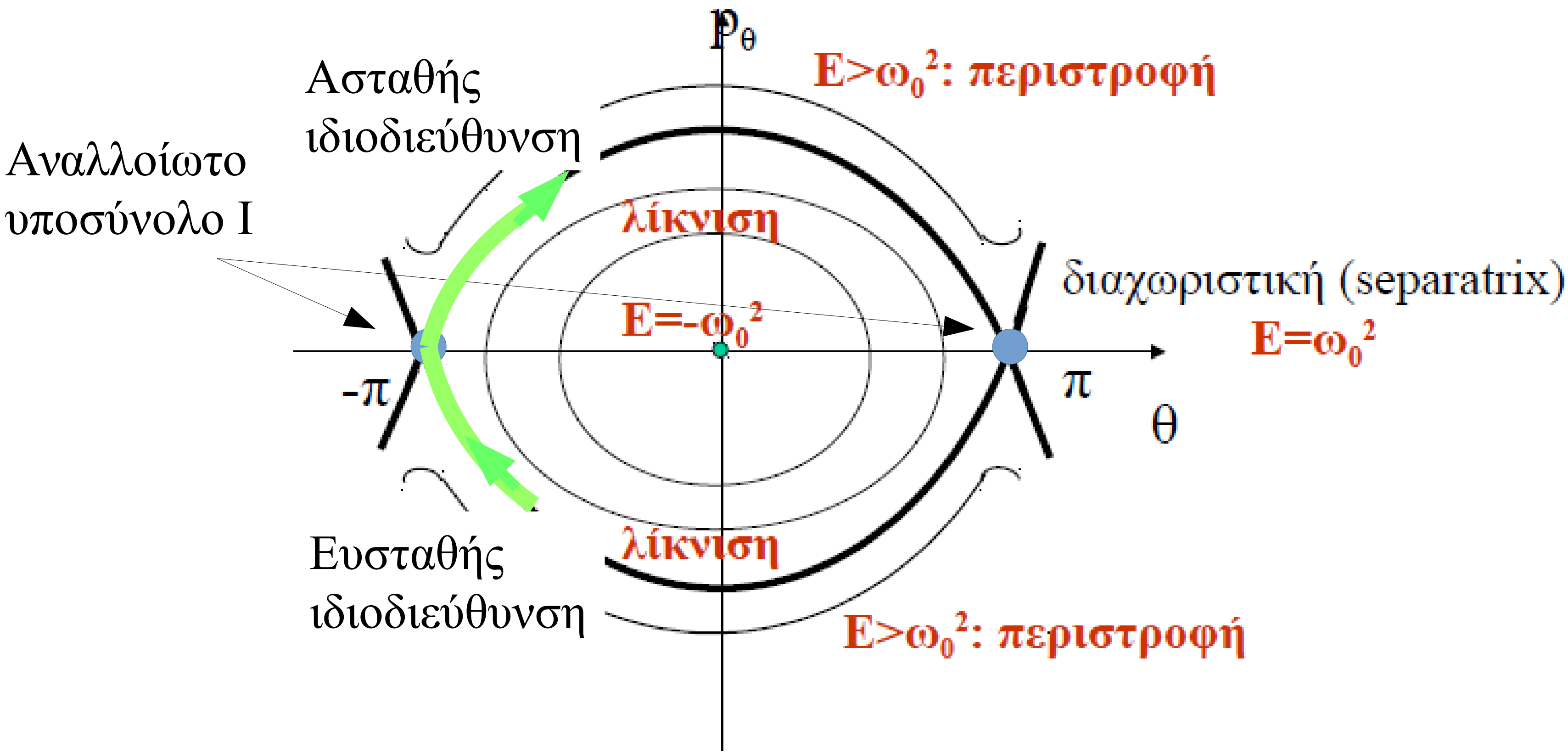
Φασικό πορτραίτο στην αδιατάρακτη περίπτωση (ε=0)

$$H=\frac{p_\theta^2}{2}-\omega_0^2\cos\theta=E\Rightarrow p_\theta=\pm\sqrt{2\left(E+\omega_0^2\cos\theta\right)}$$



Φασικό πορτραίτο στην αδιατάρακτη περίπτωση (ε=0)

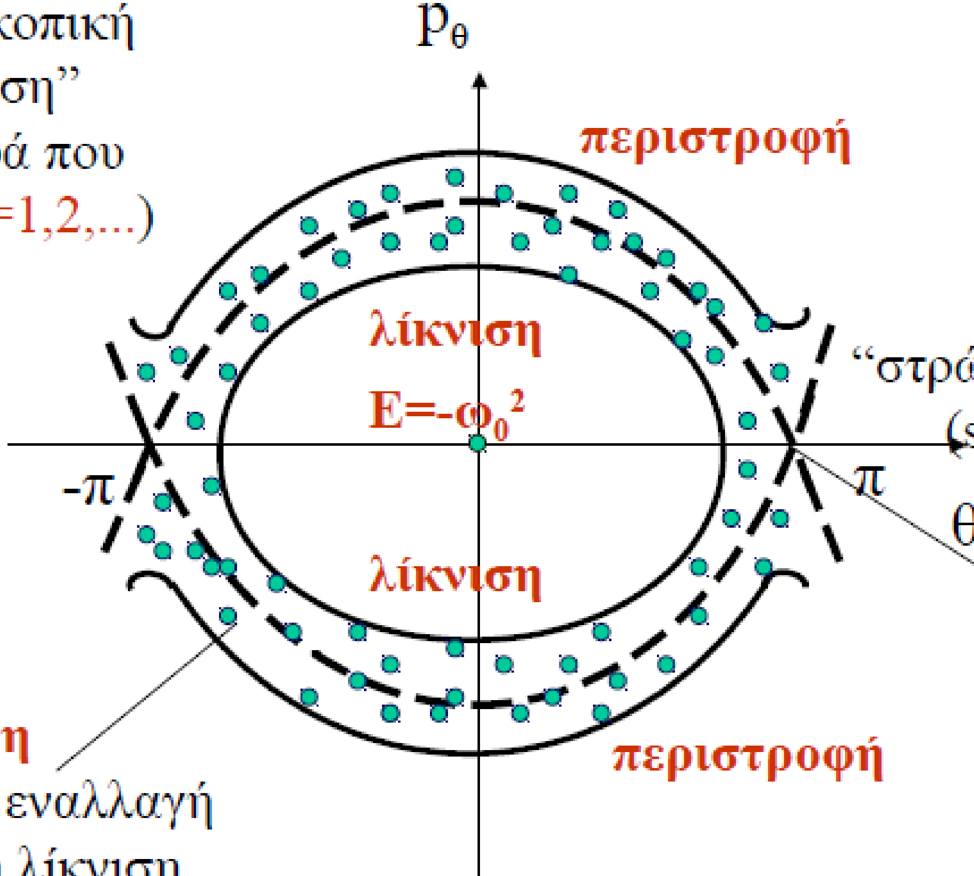
$$H = \frac{p_\theta^2}{2} - \omega_0^2 \cos\theta = E \Rightarrow p_\theta = \pm\sqrt{2\left(E + \omega_0^2 \cos\theta\right)}$$



Φασικό πορτραίτο στην διαταραγμένη περίπτωση (ε≠0)

$$H=\frac{p_\theta^2}{2}-\omega_0^2\left(1+2\varepsilon\cos\omega t\right)\cos\theta$$

"Στροβοσκοπική απεικόνιση" (κάθε φορά που $t=2\kappa\pi/\omega$, $\kappa=1,2,\ldots$)



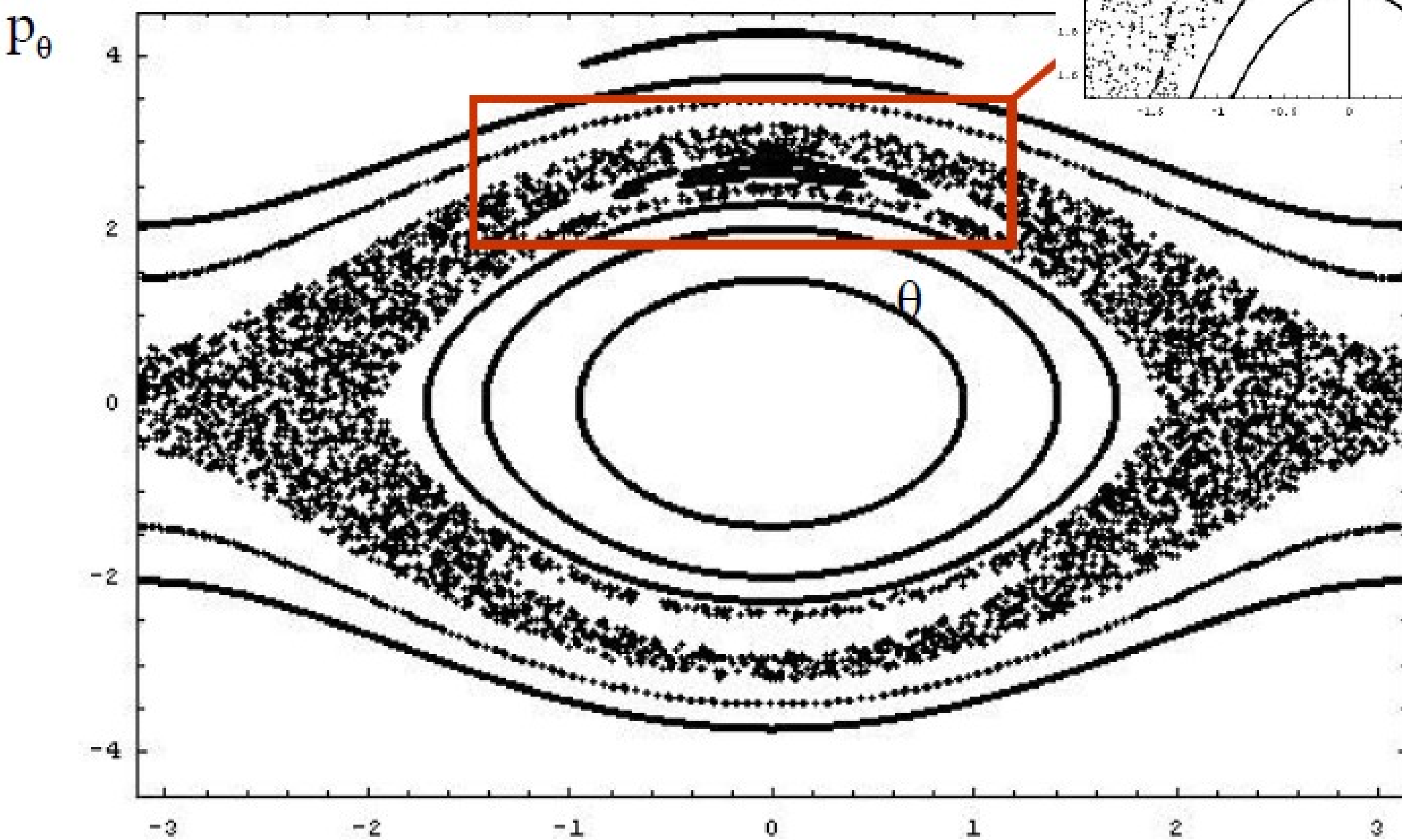
"στρώμα" διαχωριστικής (separatrix layer)

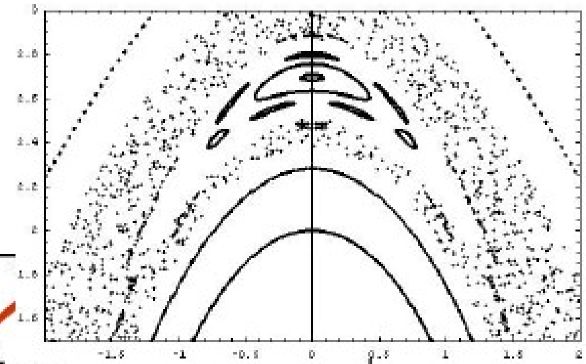
ασταθές περιοδικό σημείο

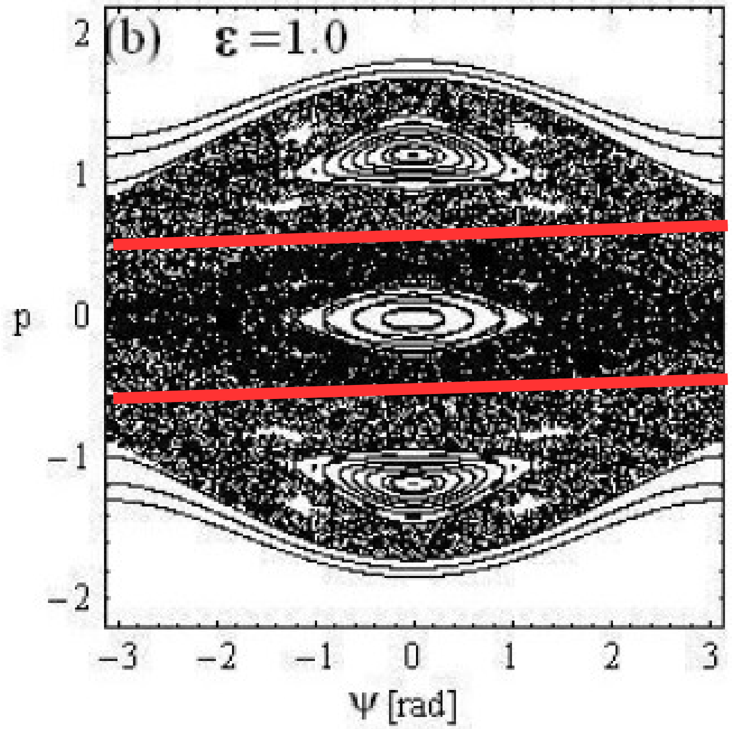
χαοτική ζώνη (ακανόνιστη εναλλαγή ανάμεσα στη λίκνιση και την περιστροφή (εναλλαγή **Bernoulli**).

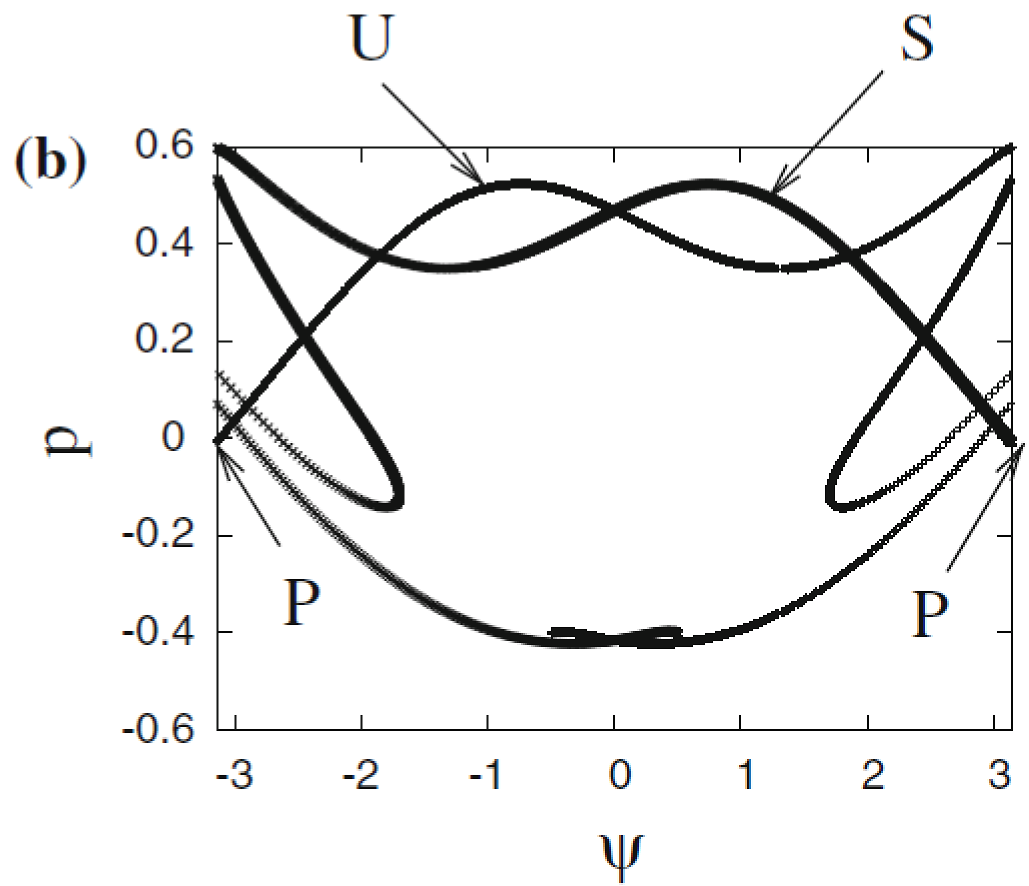
Αυτο-ομοιότητα υπό κλίμακα

ε=0.1







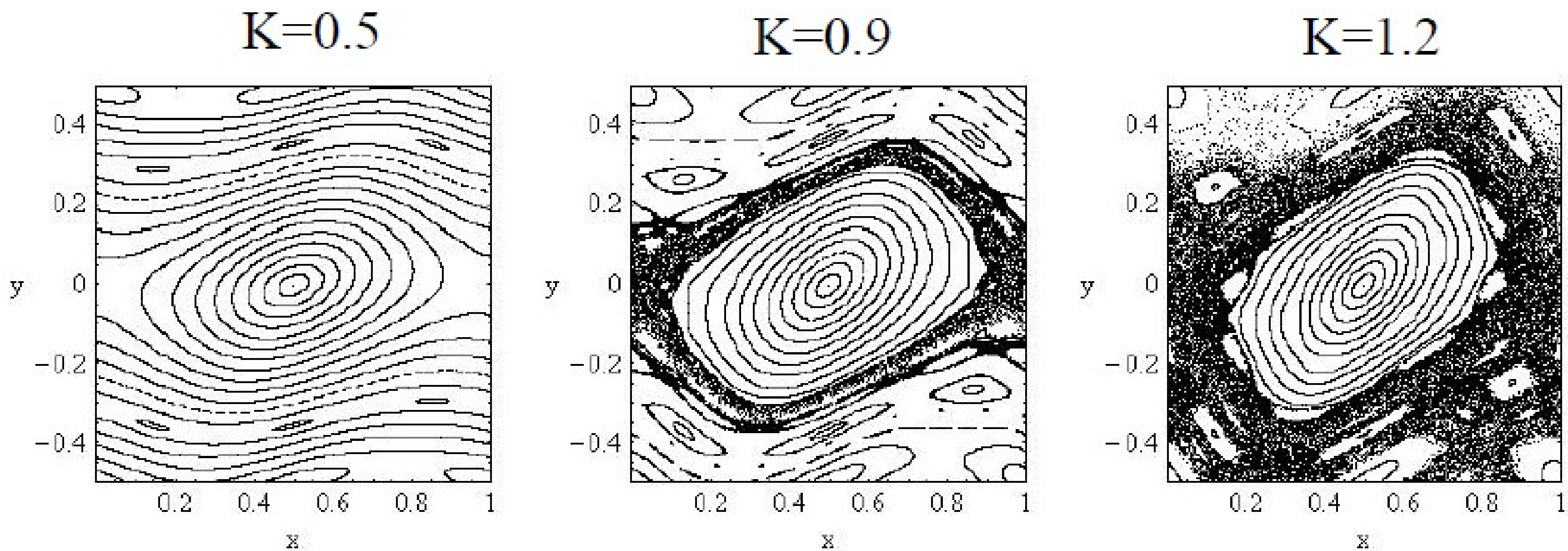


Πολύπλοκη ομοκλινική δυναμική
(Poincaré: "δεν τολμώ να τη σχεδιάσω")

Τυπική απεικόνιση
Μετάβαση από το τοπικό στο ολικό χάος

$$x' = x + y + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) \qquad (\mathrm{mod}\,1)$$

$$y' = y + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x)$$

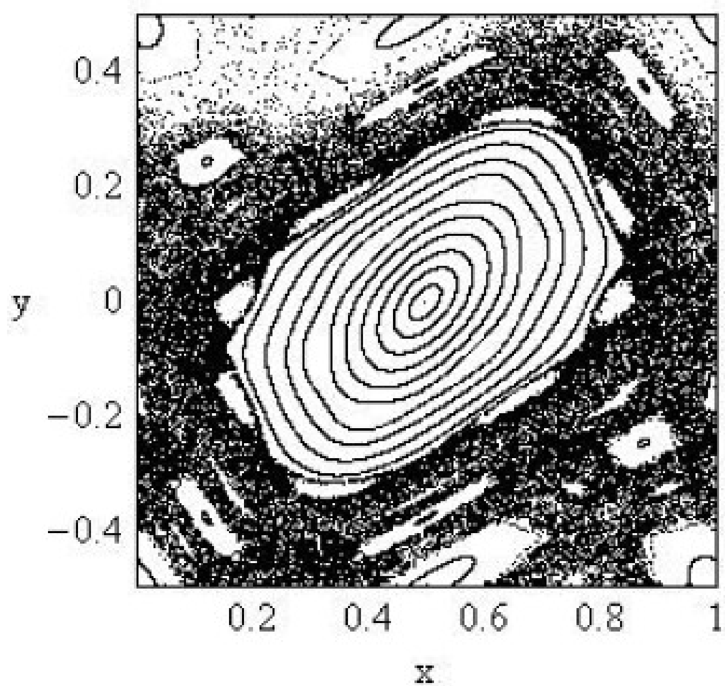


Ισχυρό χάος

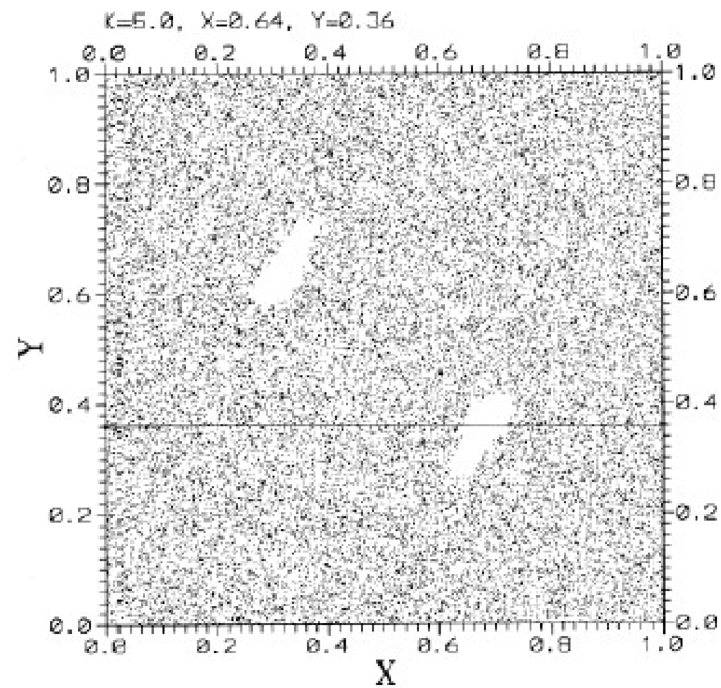
$$x' = x + y + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) \qquad (\mathrm{mod}\,1)$$

$$y' = y + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x)$$

K=1.2

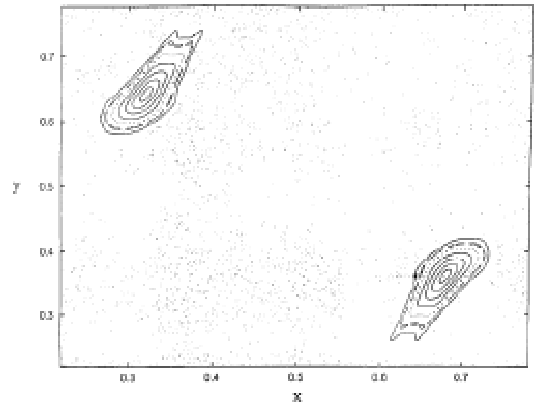


K=5

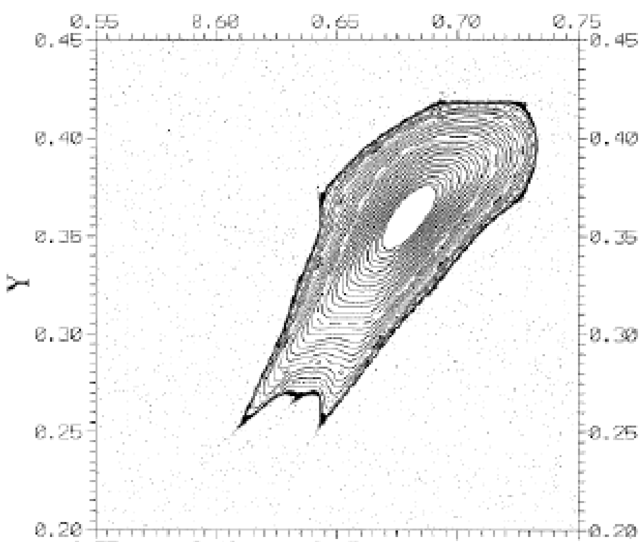


Νησίδες ευστάθειας - Κολλητικότητα

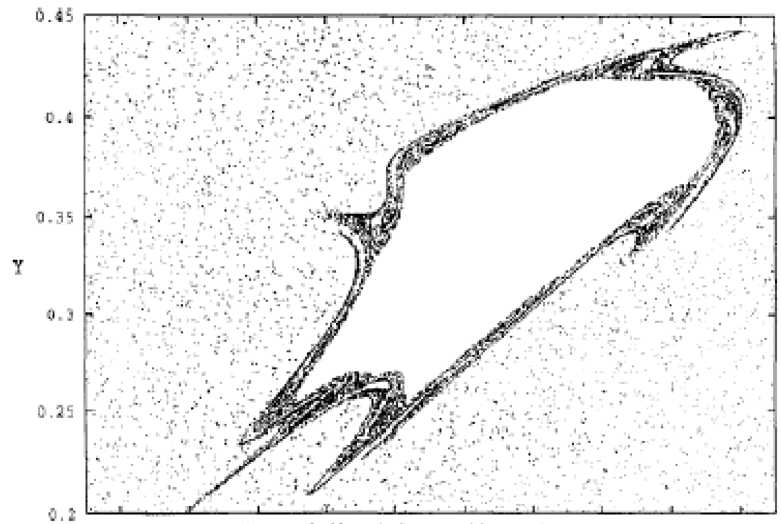
K=5



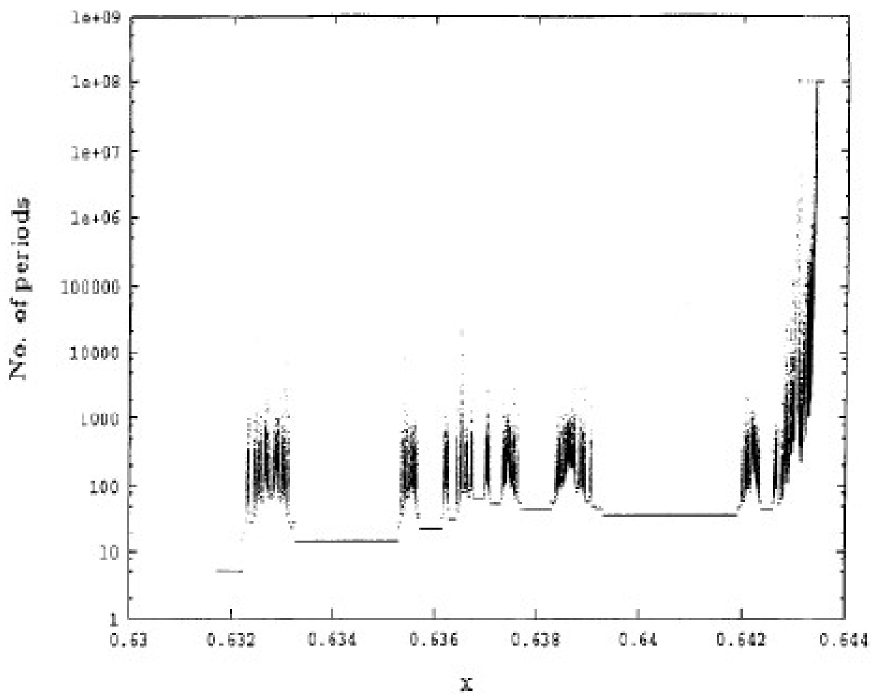
εσωτερική ζώνη
κολλητικότητας

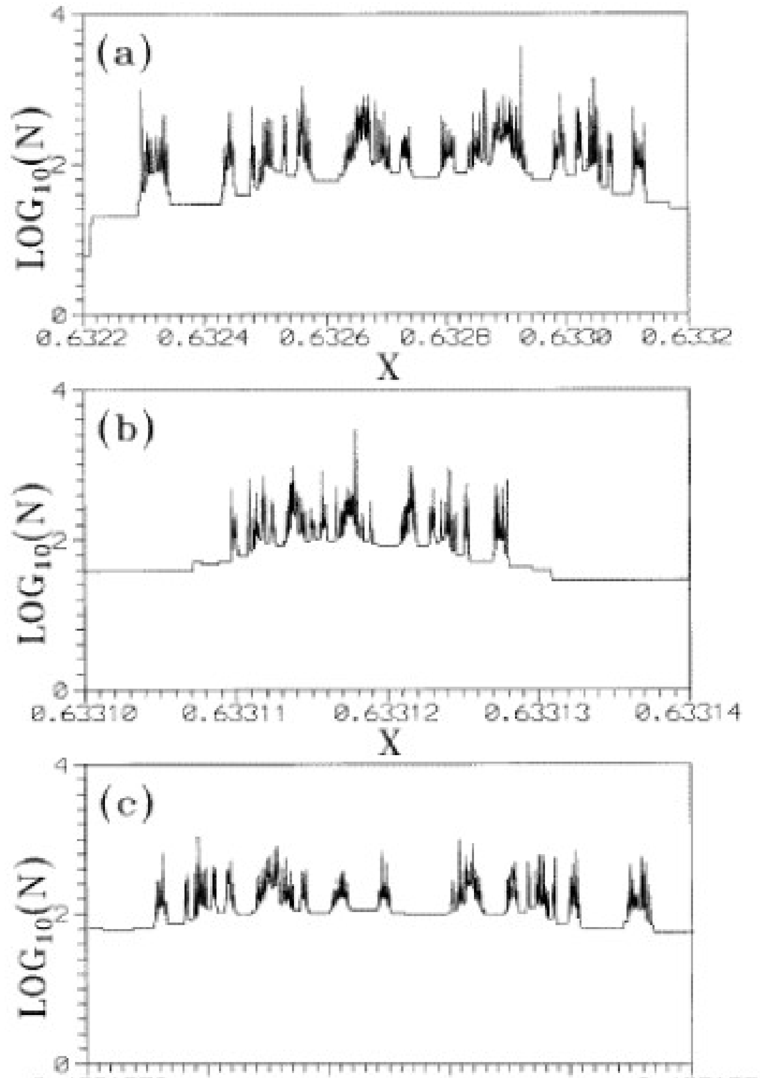


εξωτερική ζώνη
κολλητικότητας

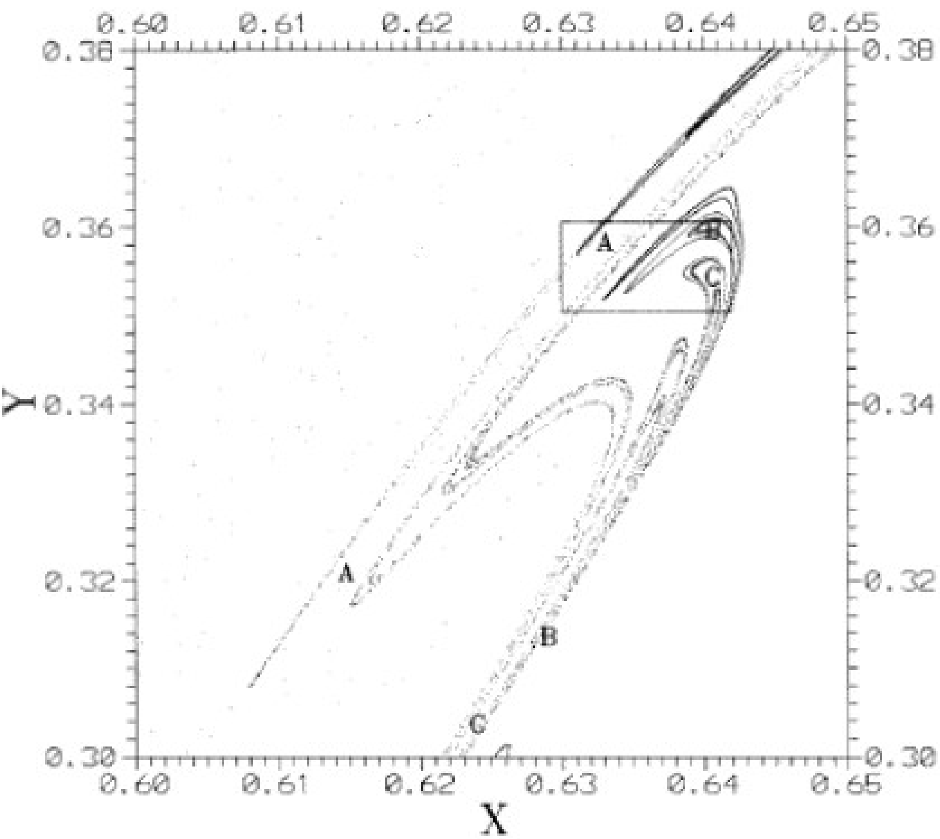


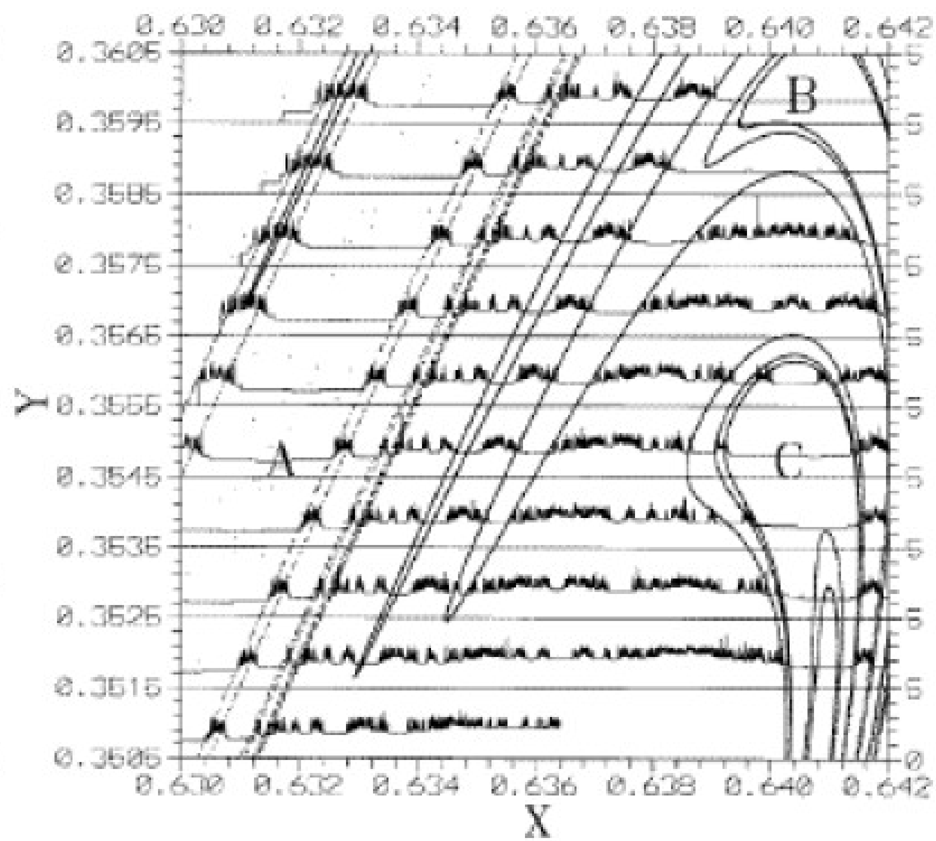
Δομή Fractal της εξωτερικής ζώνης κολλητικότητας





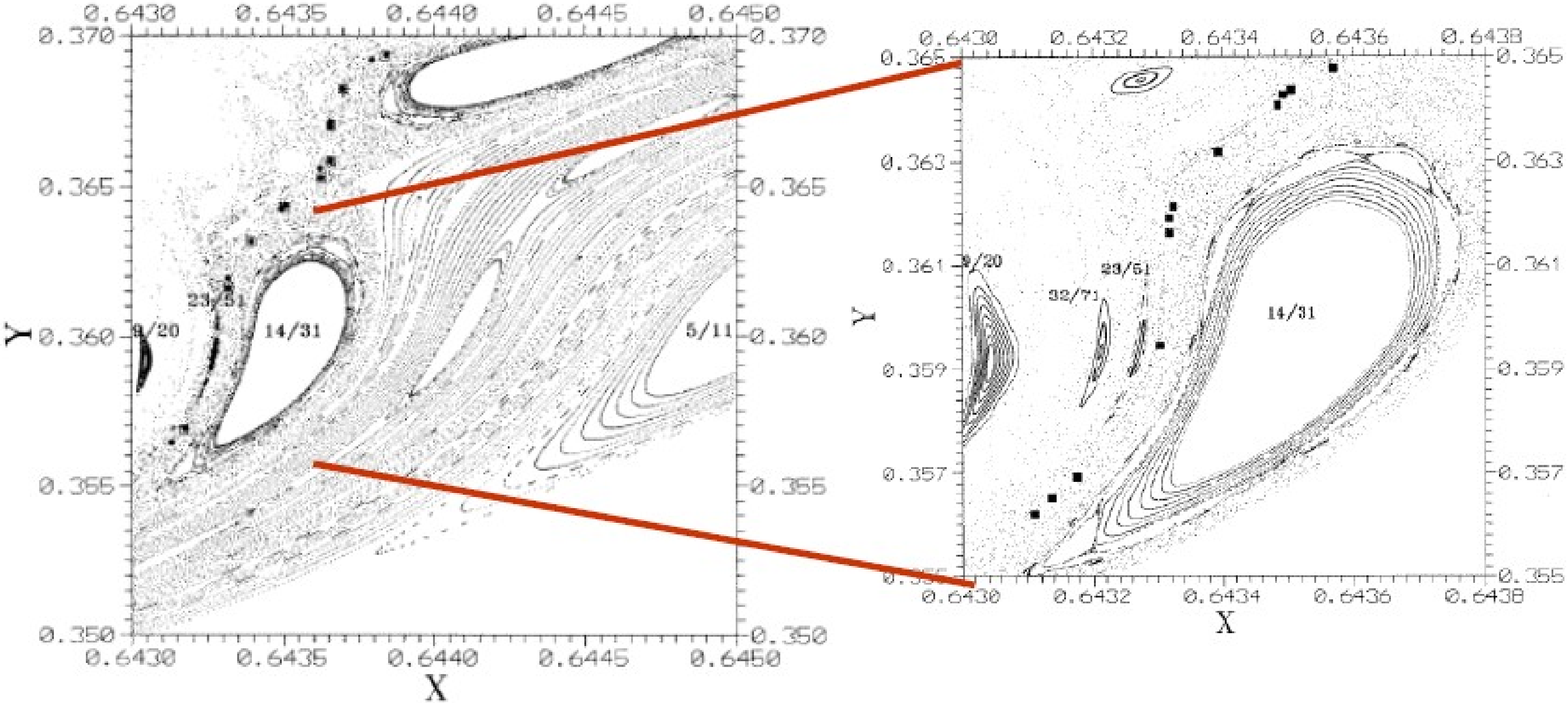
Ασταθείς αναλλοίωτες πολλαπλότητες ασταθών περιοδικών τροχιών





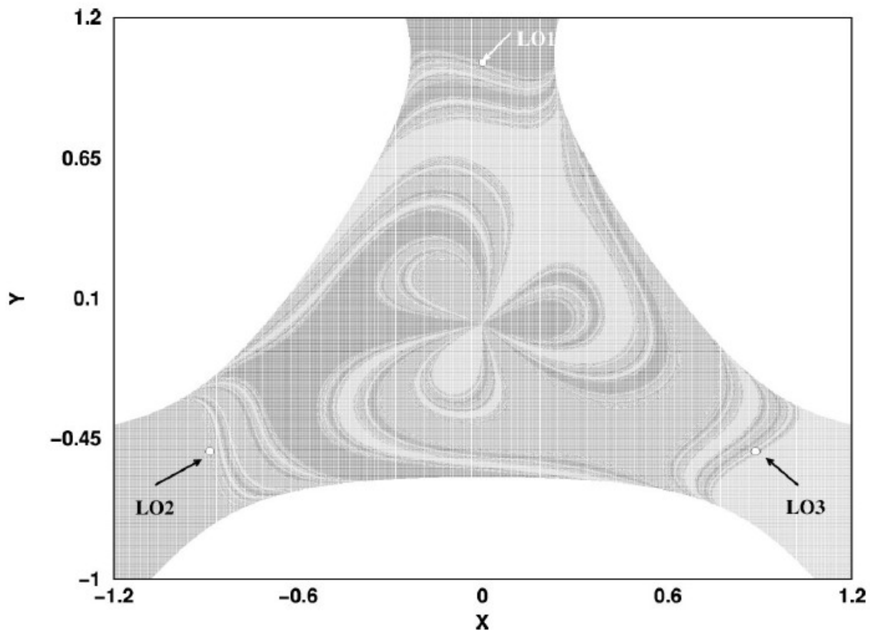
Μεγέθυνση της περιοχής κολλητικότητας

$$[2,4,1,1,1,\ldots] \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{9}{20}, \frac{14}{31}, \frac{23}{51}, \frac{37}{82}, \frac{60}{133}, \frac{97}{215}, \frac{157}{348}, \frac{254}{563}, \frac{411}{911} \ldots$$



Chaotic saddle and its manifolds in the Hénon - Heiles system

AGUIRRE, VALLEJO, AND SANJUÁN PHYSICAL REVIEW E **64** 066208



$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

FIG. 4. Exit basin diagram with 1000×1000 initial conditions (x,y) and $E=0.25$. The initial conditions are plotted black if the orbit escapes through exit 1, dark gray for exit 2, and pale gray for exit 3. The Lyapunov orbits are remarked with arrows.

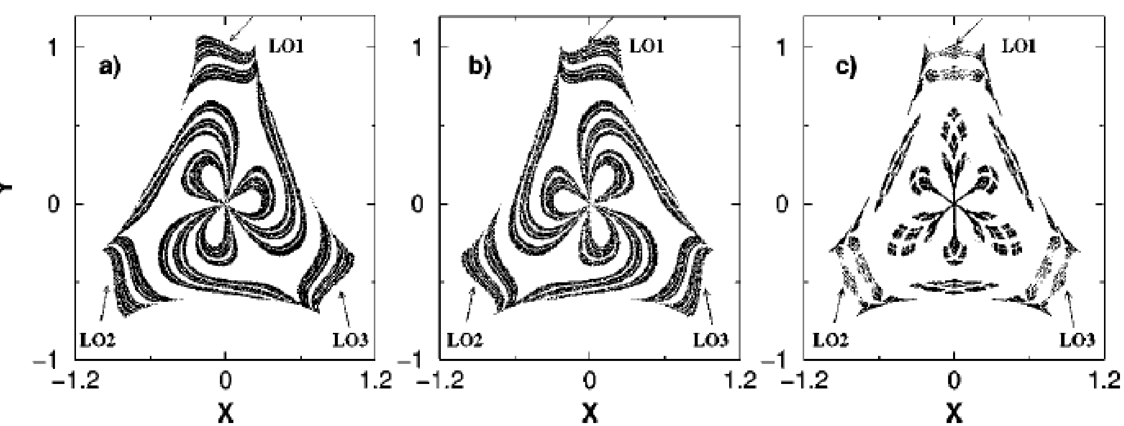
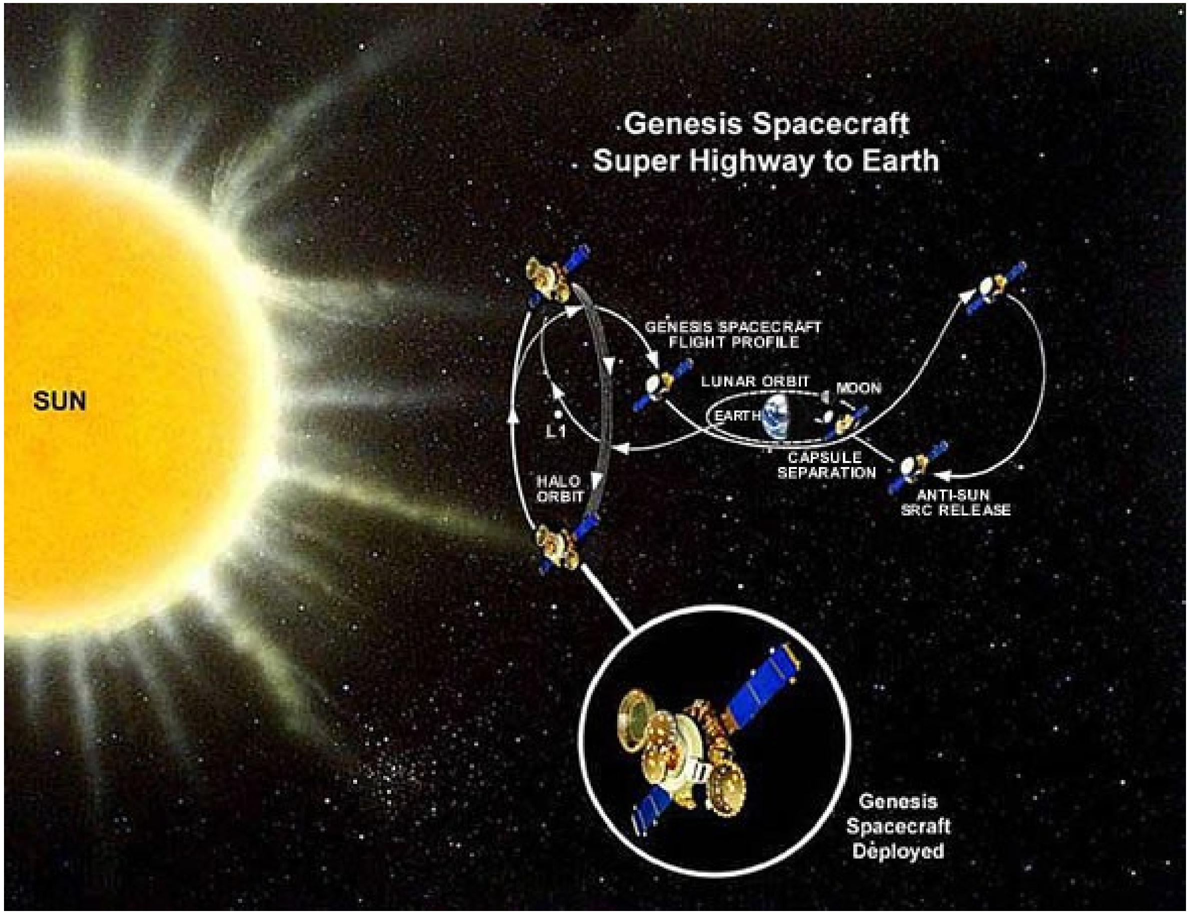


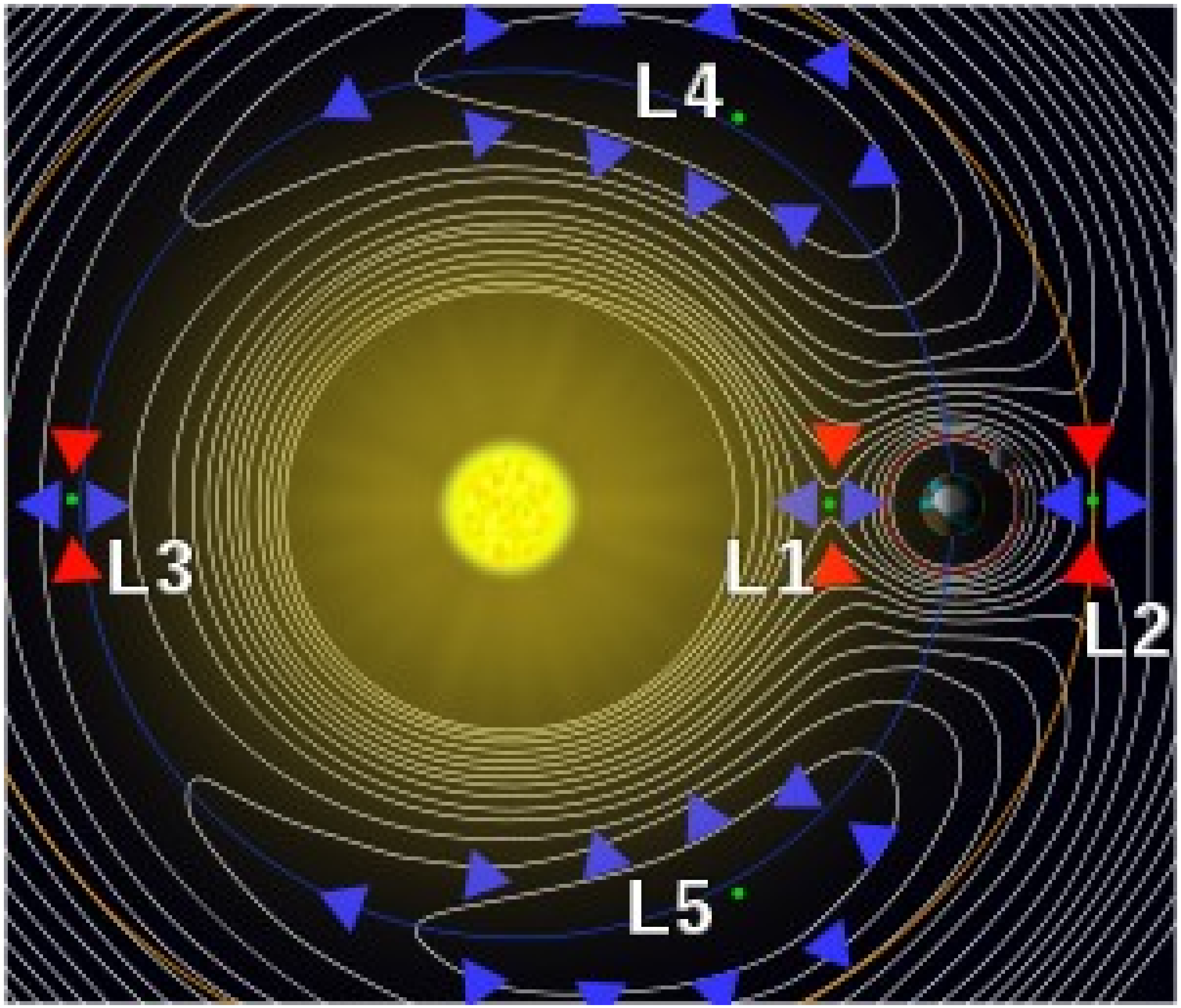
FIG. 6. Stable manifold, unstable manifold, and strange saddle for $E=0.25$. The initial conditions are (x,y) and tangential shooting, with a fine grid of 2000×2000 dots. The arrows show the three Lyapunov Orbits (LO1, LO2, and LO3).

Δυναμική πολλαπλοτήτων στη διαστημική πτήση (βλ. Gómez et al 1995, Gómez & Barrabes 2010)

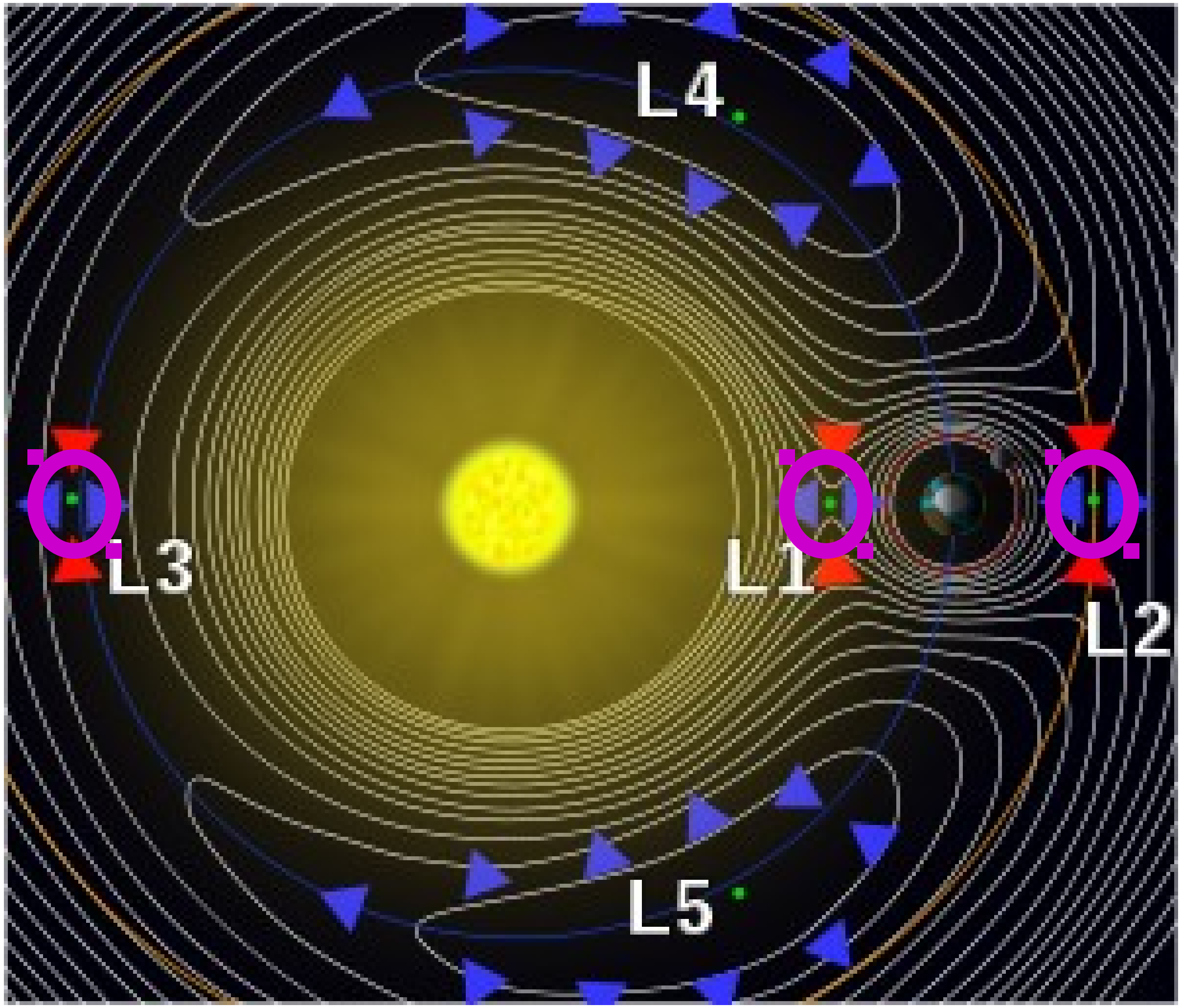


The complicated Genesis mission trajectory was the first one completely designed using Space Manifold Dynamics (Credit: NASA/JPL-Caltech)

Ορια της κίνησης στο Κυκλικό Περιορισμένο Πρόβλημα Τριών Σωμάτων



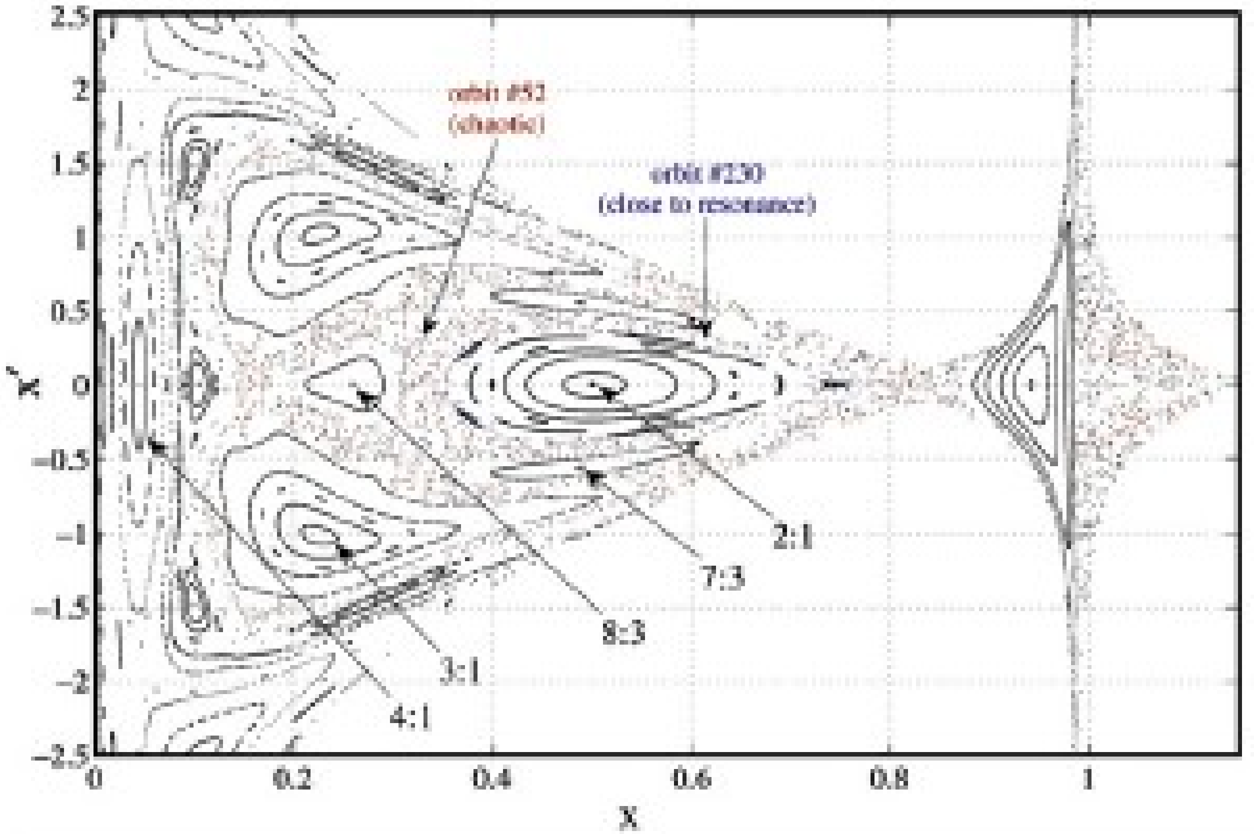
Ορια της κίνησης στο Κυκλικό Περιορισμένο Πρόβλημα Τριών Σωμάτων



Η διάσωση της αποστολής “Hiten” (MUSES-B, Belbruno and Miller 1993)

χαμηλού κόστους “πτήση στο φεγγάρι”

αξιοποιώντας το "Ασθενές Σύνορο Εστάθειας" (αναλλοίωτες πολλαπλότητες των συγγραμικών σημείων Lagrange)



Topputo et al. 2008

Koon et al 2001: σχεδιασμός τροχιάς που αξιοποιεί τις ετεροκλινικές συνδέσεις των τροχιών Lyapunov στο ΚΠΠ3Σ Γης - Ηλιος και Γη - Σελήνη

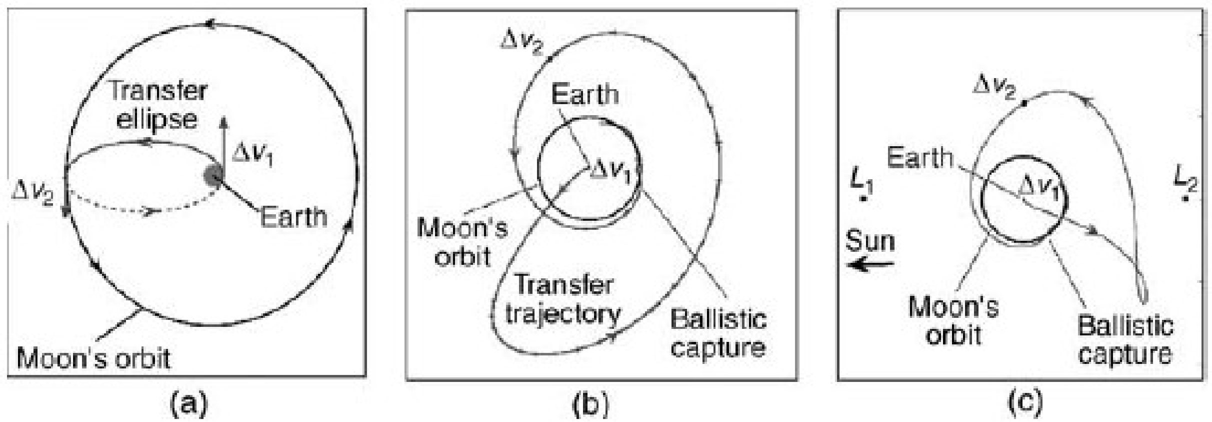


Figure 1. (a) Hohmann transfer. (b) Low energy transfer trajectory in the geocentric inertial frame. (c) Same trajectory in the Sun–Earth rotating frame.

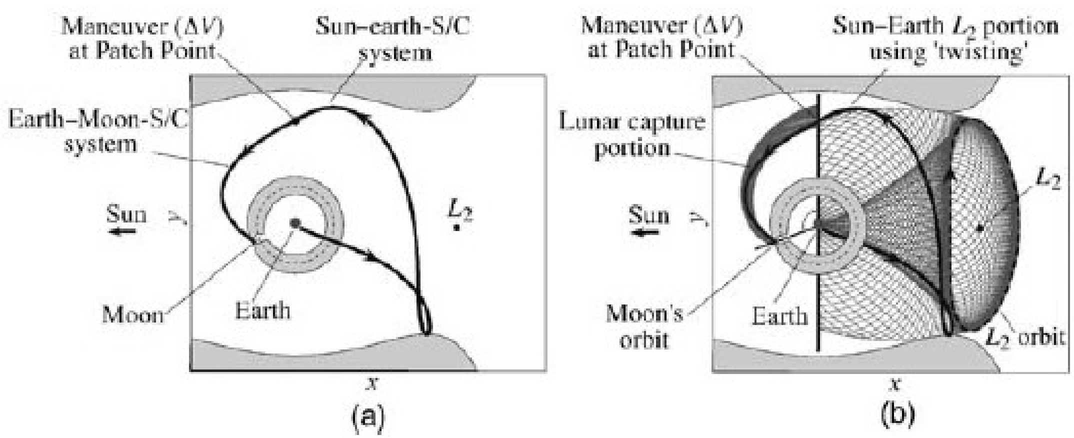
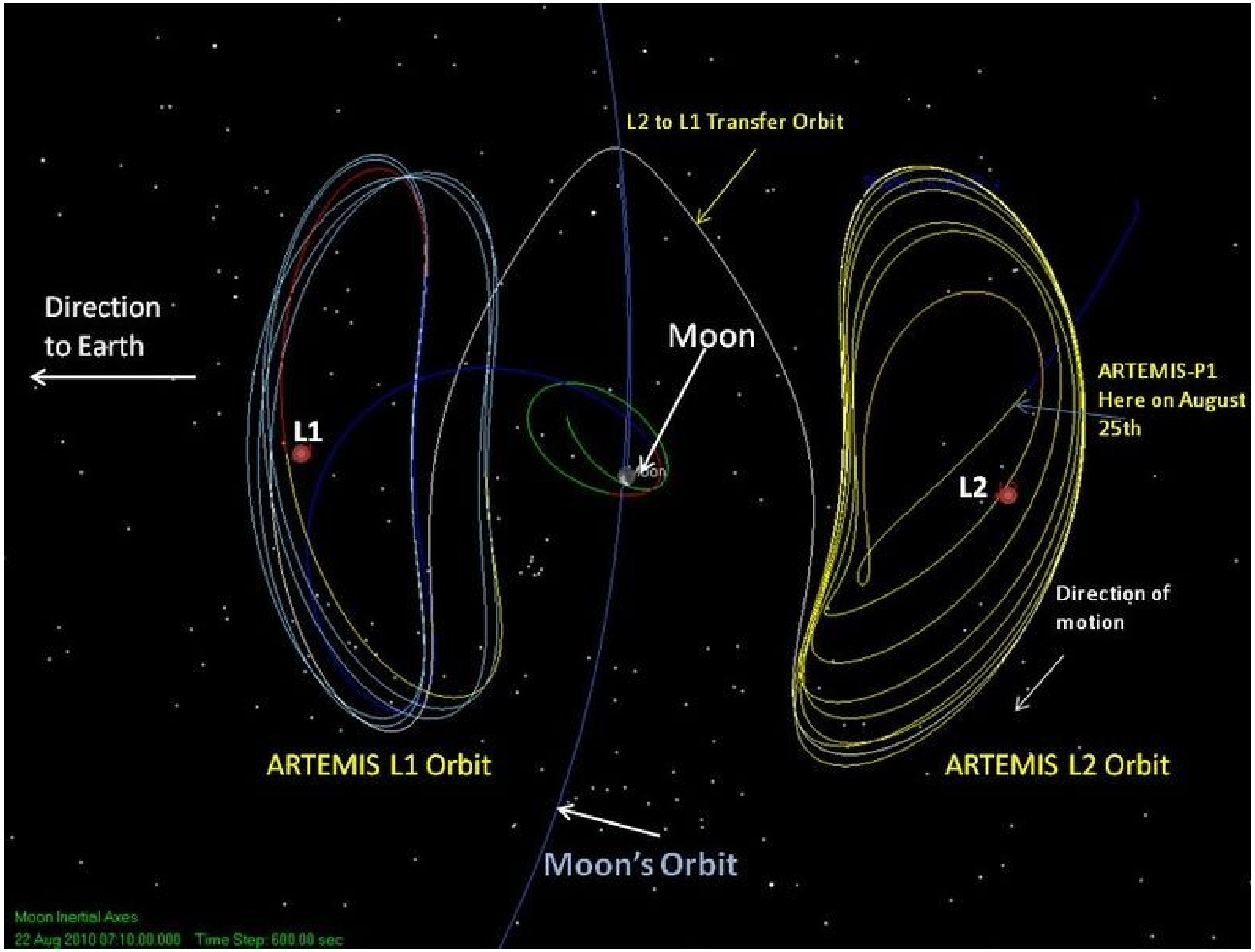


Figure 2. (a) Two legs of a Hiten-like trajectory in the Sun–Earth rotating frame. (b) The interaction of invariant manifold tubes of the Sun–Earth and the Earth–Moon systems permits a fuel efficient Earth-to-Moon transfer with the perturbation of the Sun.

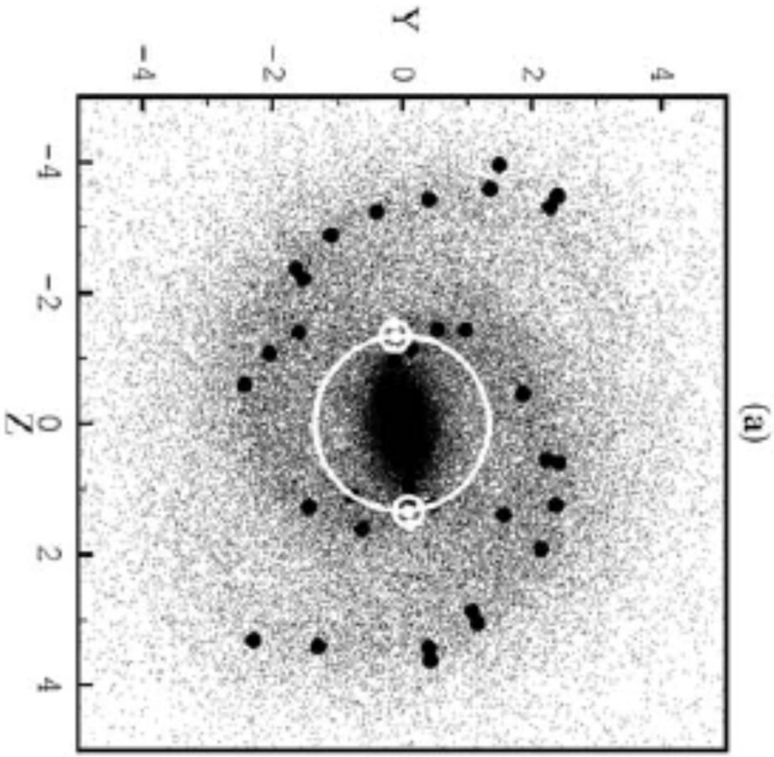
Αποστολή "Αρτεμις"

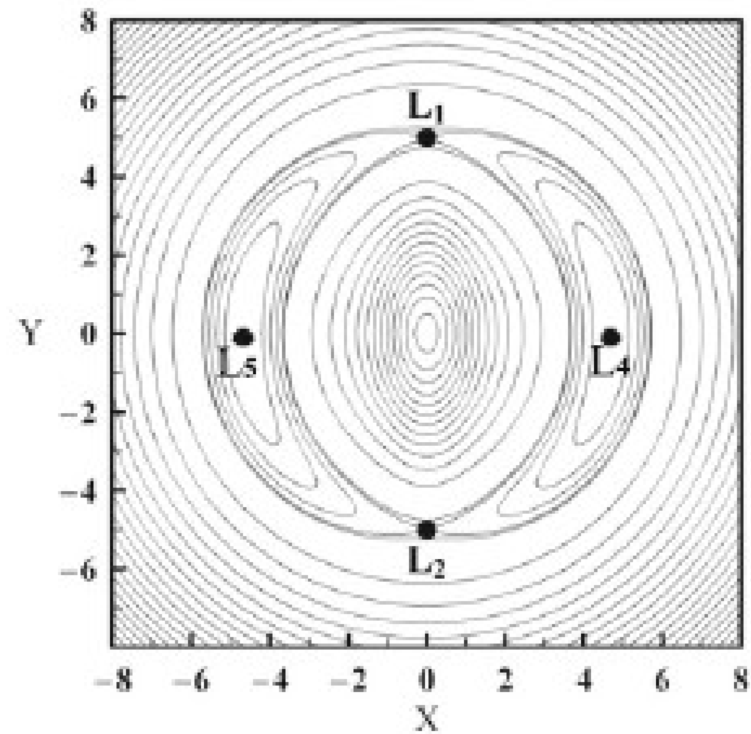
Εξ' ολοκλήρου σχεδιασμένη χρησιμοποιώντας αναλλοίωτες πολλαπλότητες



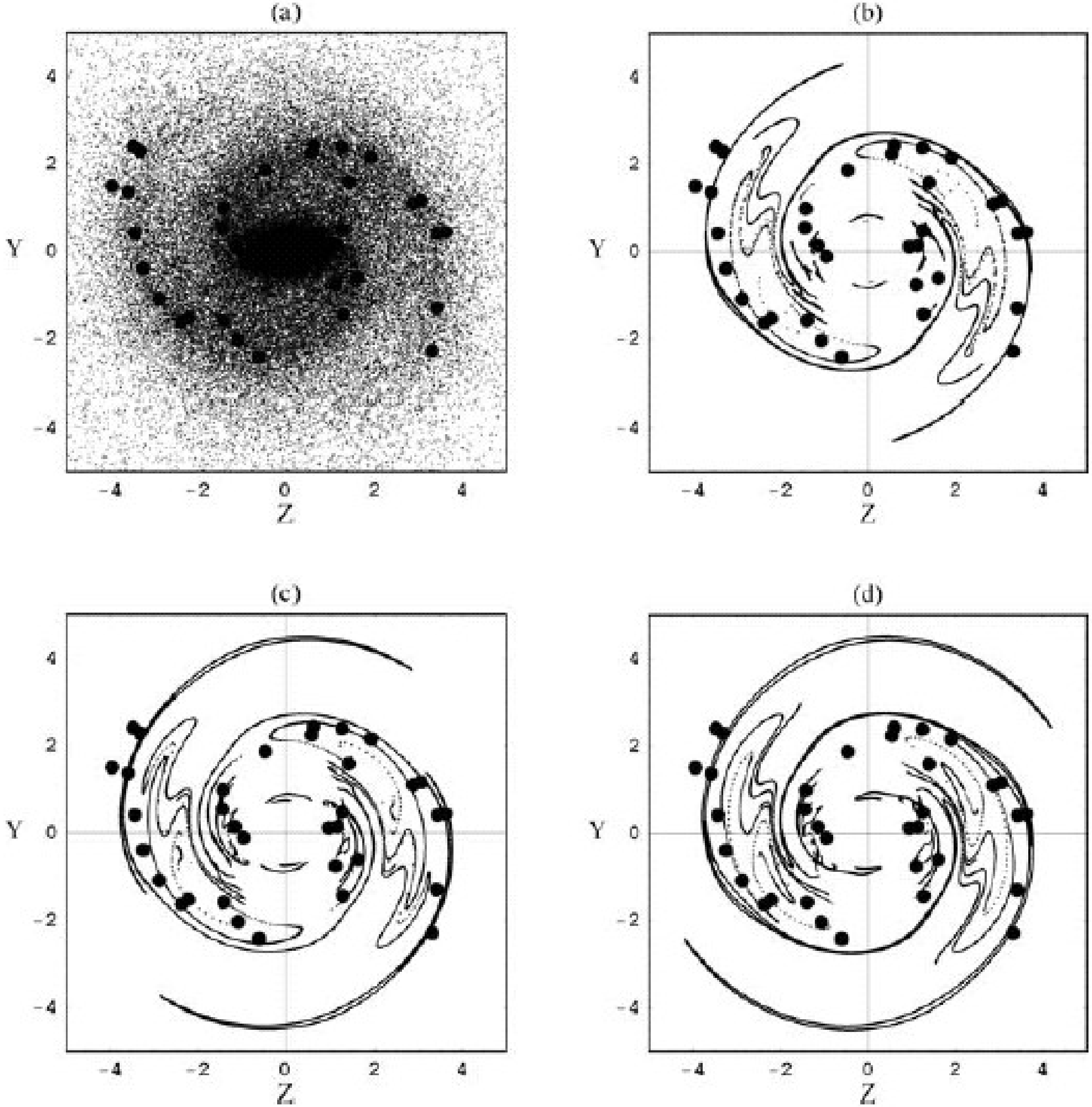
Σπειροειδής δομή σχηματιζόμενη από χαοτικές τροχιές

Voglis, C.E. and Tsoutsis, 2006, Romero-Gomez et al. 2006, 2007, Tsoutsis and C.E. 2007, 2008)



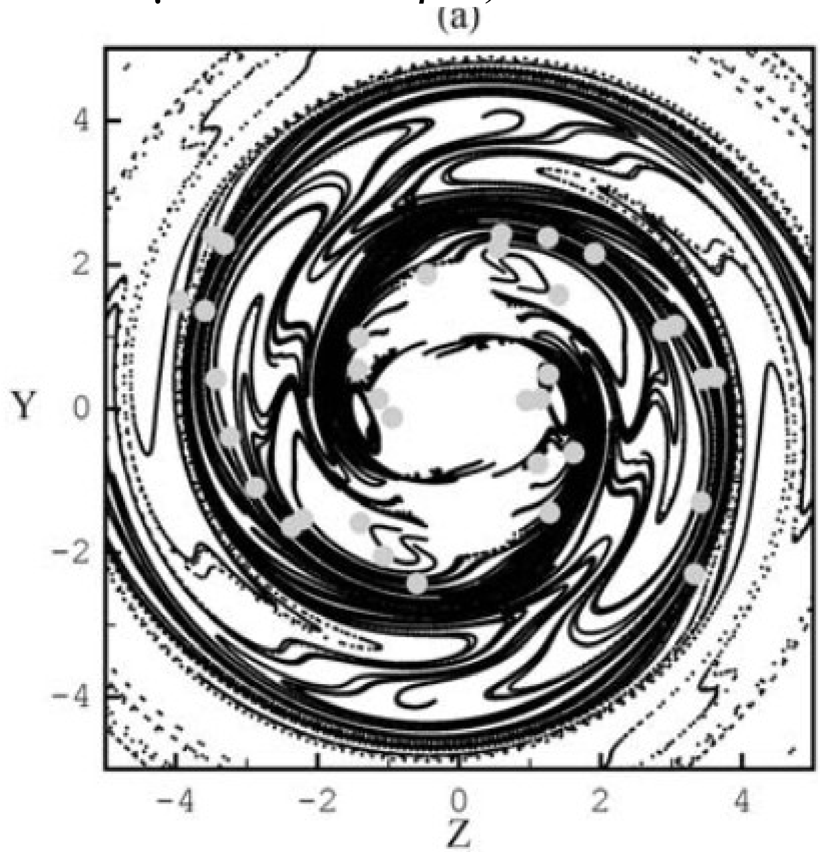


$$\mathcal{W}^{U}_{PL_1} = \left[\bigcup (r_0, \theta_0, p_{r0}, p_{\theta 0}) : \lim_{t \to -\infty} ||Q(t; r_0, \theta_0, p_{r0}, p_{\theta 0}) - PL_1|| = 0 \right]$$

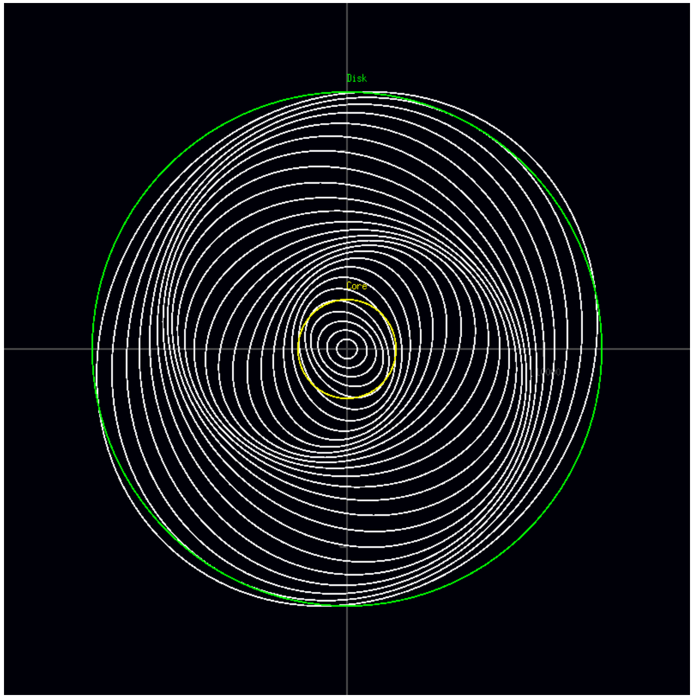

(a)
(b)
(c)
(d)
Y
Z
4
2
0
−2
−4

Χαοτικές σπείρες

Σπείρες "κανονικού σχήματος" (grand design) σχηματιζόμενες από χαοτικές τροχιές κατά μήκος αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων (ή "Λαγκρανζιανών συνεκτικών δομών" στο αέριο)



Density wave theory



Source: http://beltoforion.de/article.php?a=spiral_galaxy_renderer

Σχέση με παρατηρούμενες μορφολογίες

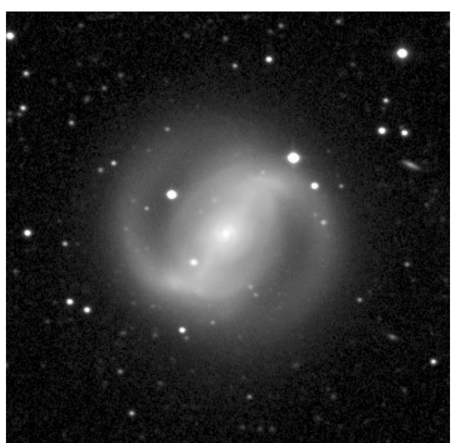
Δακτυλίδια και Γέφυρες?

NGC4394

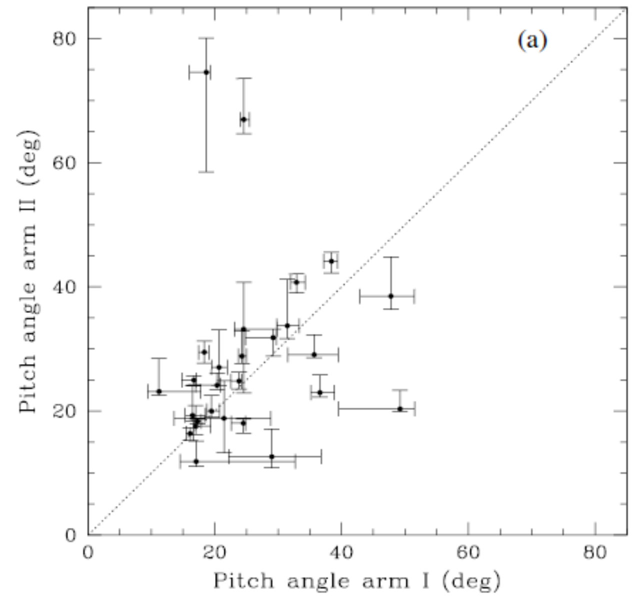
NGC1097

NGC1365

NGC 4314

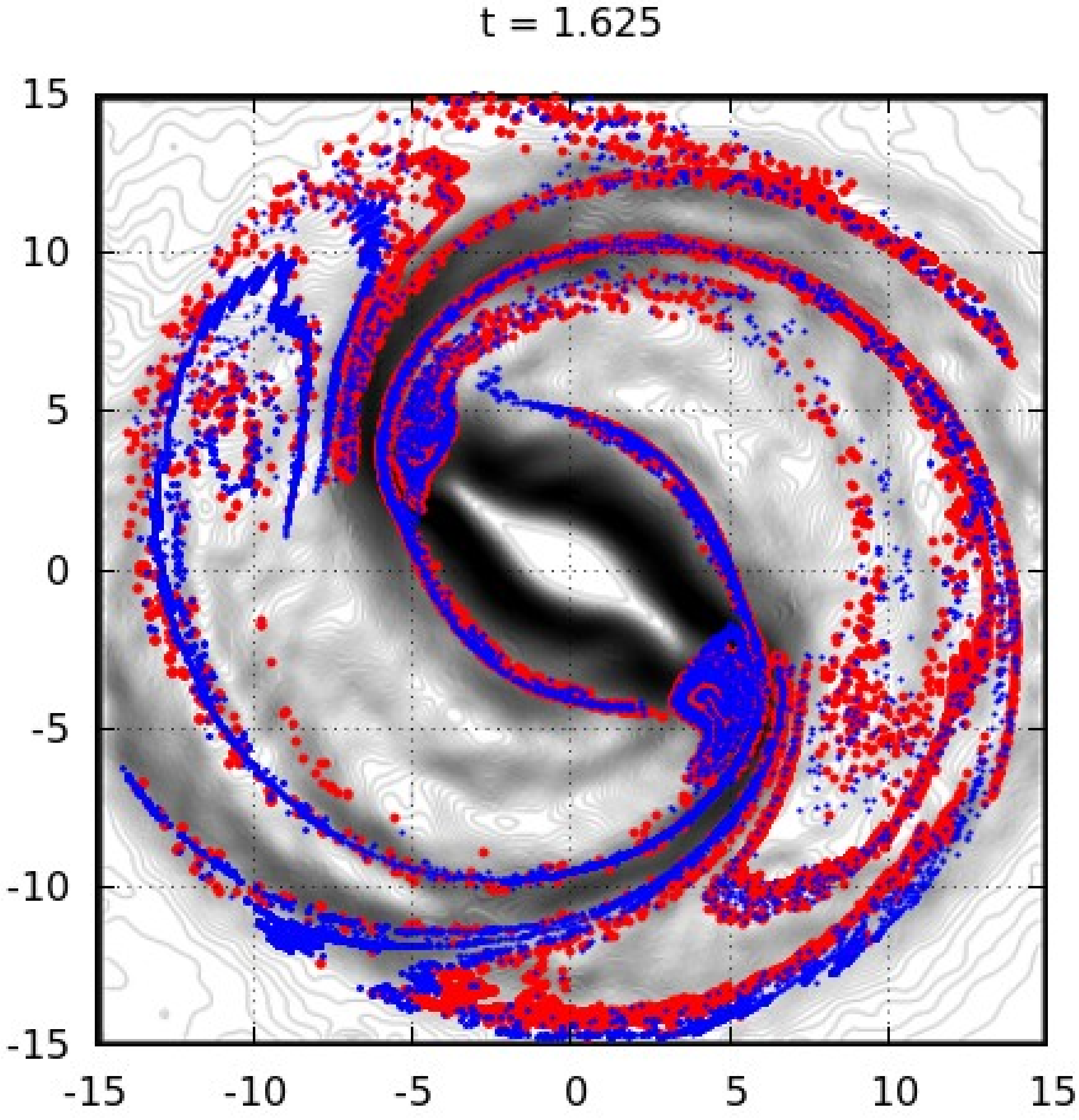


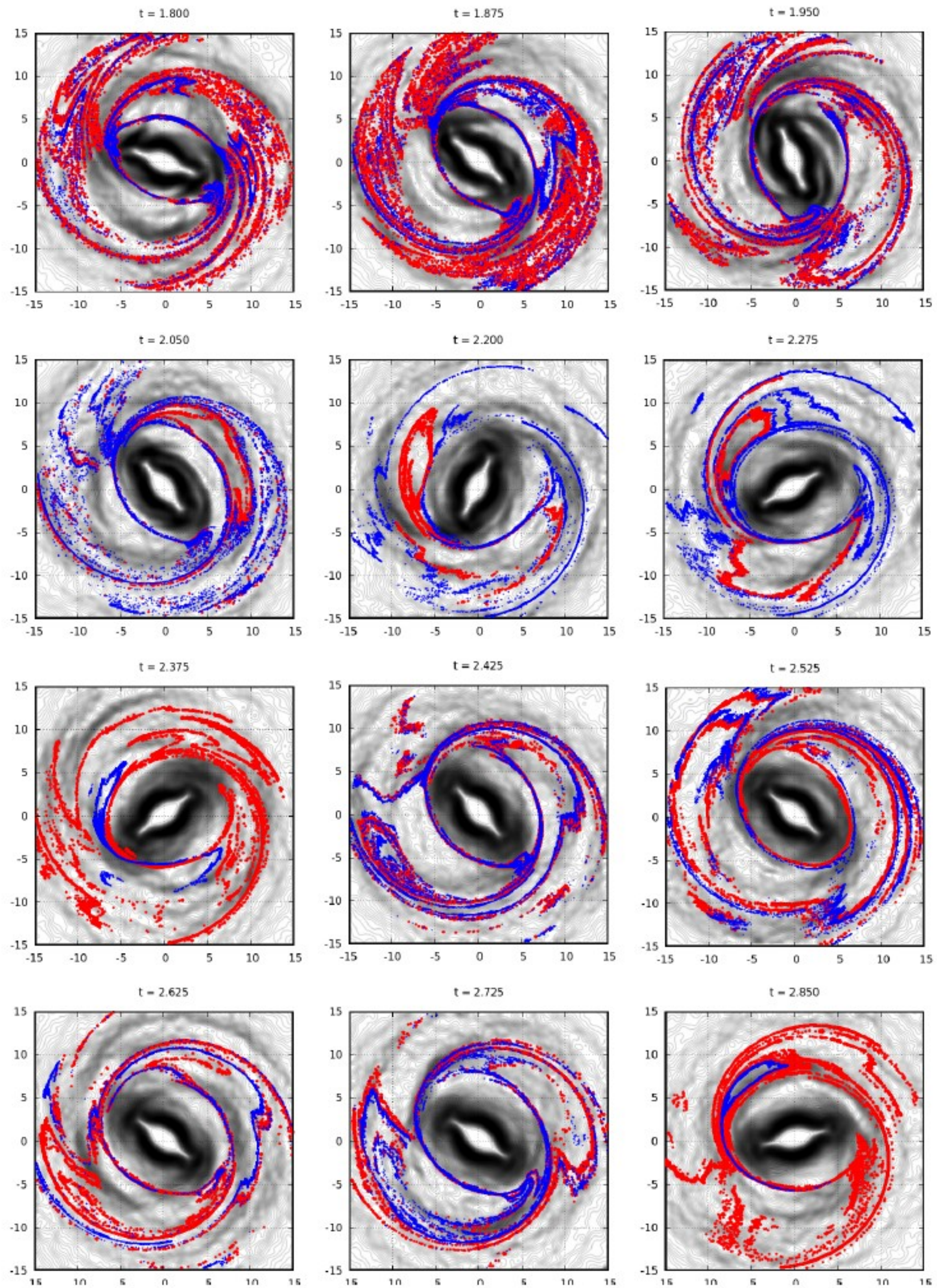
Σχέση πλάτους - γωνίας κλίσης των σπειρών



Martinez-Garcia et al. 2012

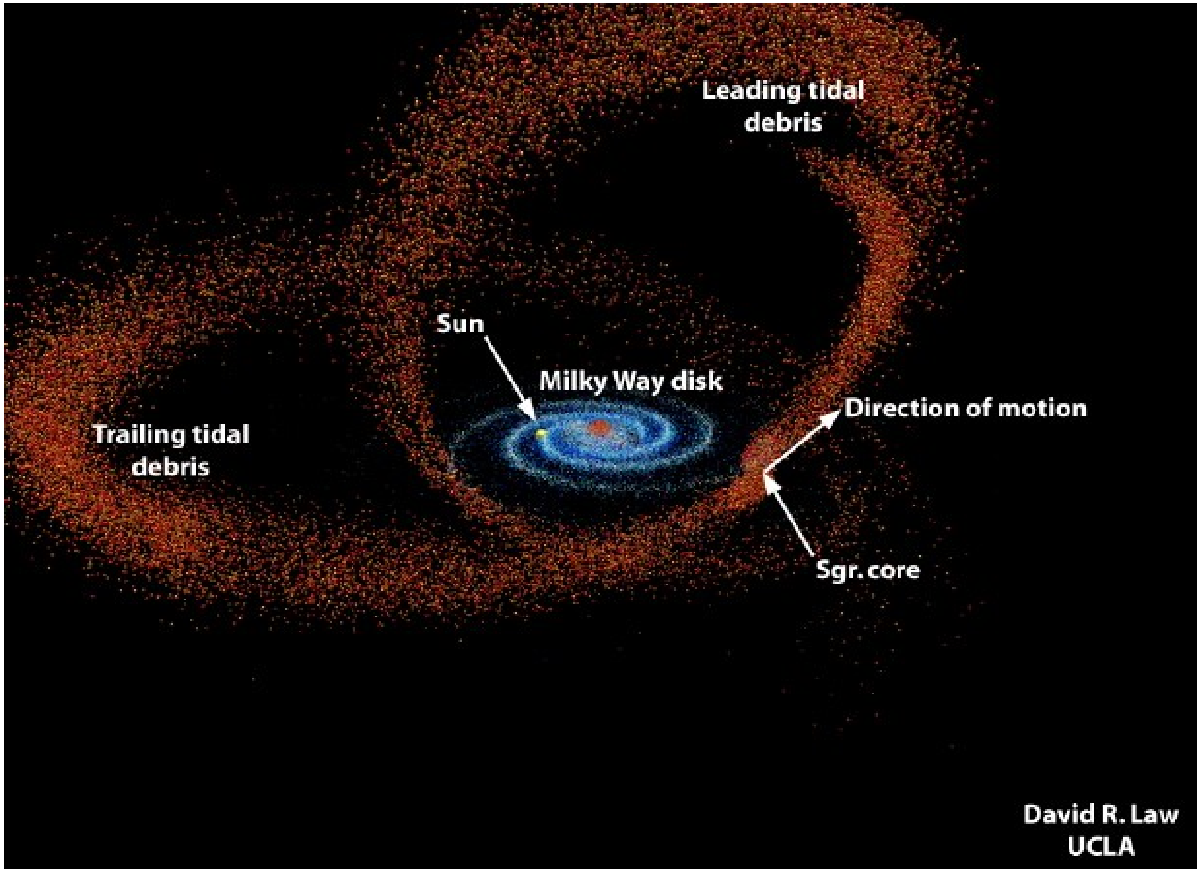
Οι πολλαπλότητες ως "χαοτικές λεωφόροι" για την κίνηση των αστέρων





Efthymiopoulos,
Kyziropoulos,
Paez,
Zouloumi &
Gravvanis
(MNRAS 2018)

Κοσμολογία: Παλλιροϊκά ρεύματα από την κίνηση γαλαξιών - νάνων μέσα στη "σκοτεινή" άλω του Γαλαξία

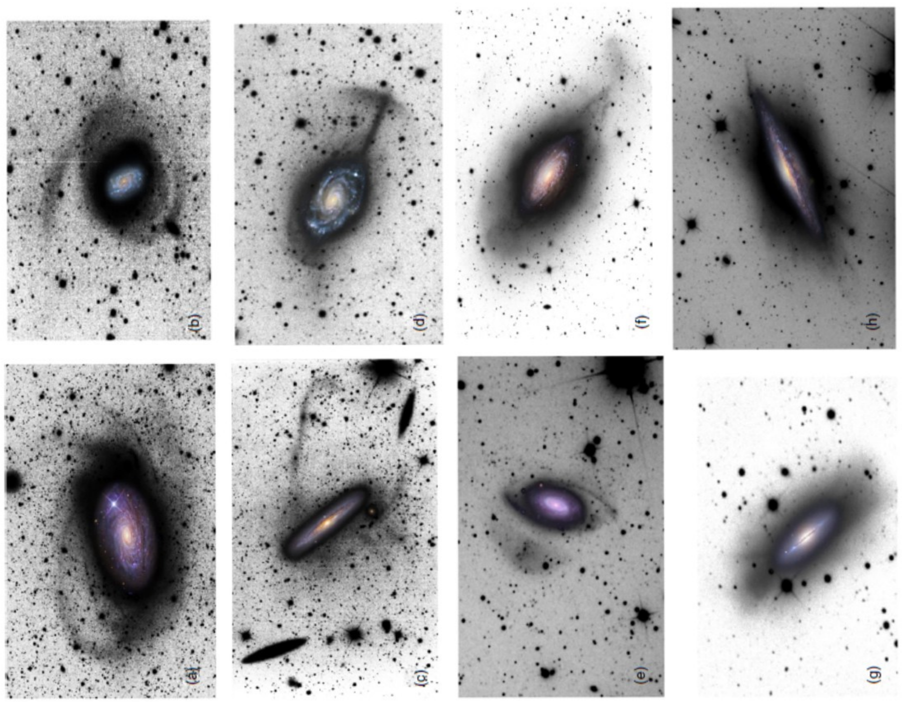


Sagittarius dSph: μοντελοποίηση του παλλιροϊκού ρεύματος
Law & Majewski (2000, 2003)

The Astronomical Journal, 140:962–967, 2010 October doi:10.1088/0004-6256/140/4/962

STELLAR TIDAL STREAMS IN SPIRAL GALAXIES OF THE LOCAL VOLUME: A PILOT SURVEY WITH MODEST APERTURE TELESCOPES

David Martínez-Delgado[1,2], R. Jay Gabany[3], Ken Crawford[4], Stefano Zibetti[1], Steven R. Majewski[5], Hans-Walter Rix[1], Jürgen Fliri[2,6], Julio A. Carballo-Bello[2], Daniella C. Bardalez-Gagliuffi[2,7], Jorge Peñarrubia[8], Taylor S. Chonis[9], Barry Madore[10], Ignacio Trujillo[2], Mischa Schirmer[11], and David A. McDavid[5]



This pilot survey was conducted with three privately owned observatories equipped with modest-sized telescopes located in the USA and Australia (see Table 1). Each observing site fea-

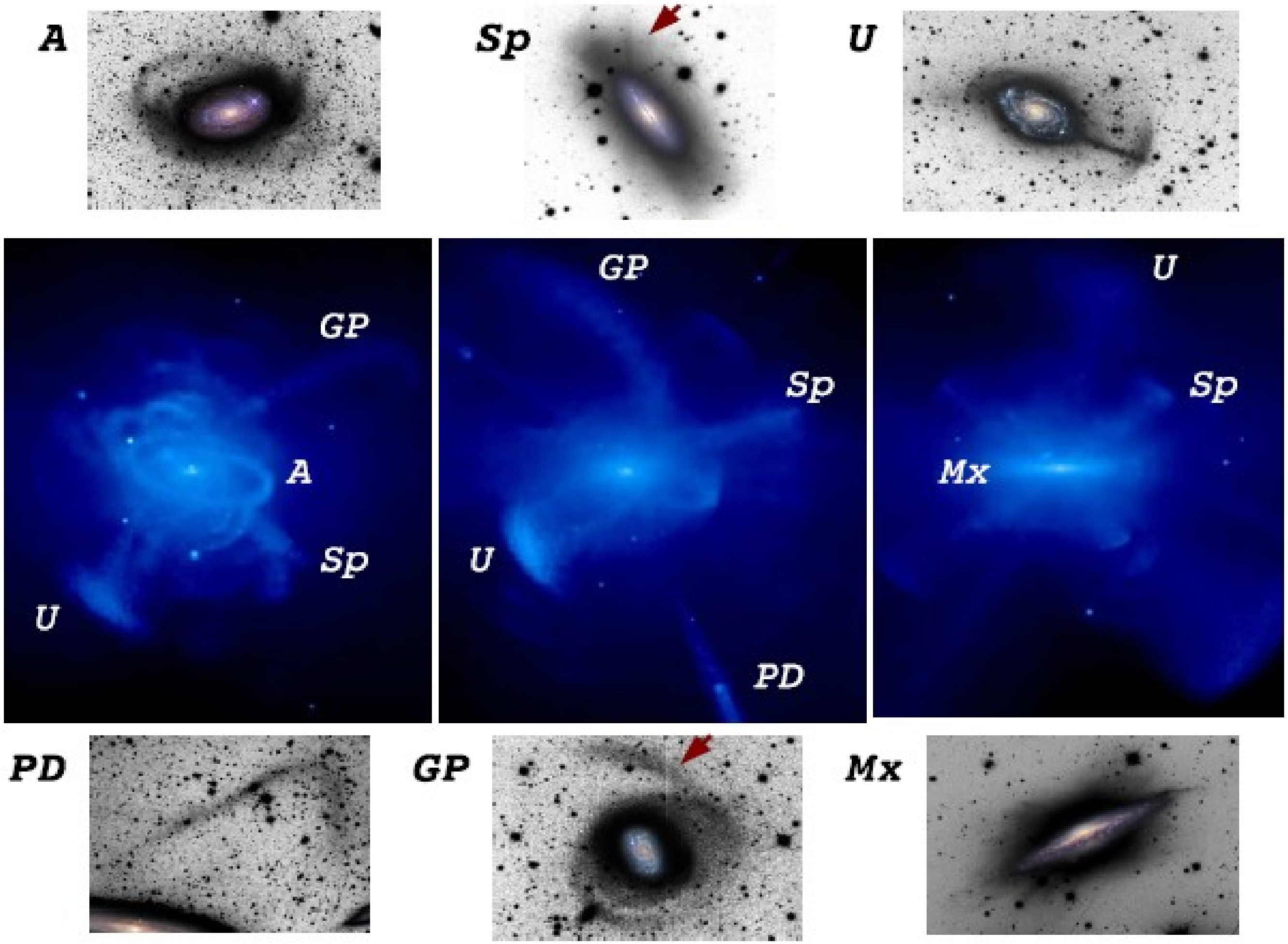
Observatories

Observatory	Location	Telescope
BBO	NM, USA	RCO 0.508 m
RdS	CA, USA	RCO 0.508 m
Mrk	South Australia	RC0 0.368 m
New Mexico Skies (NMS)	NM, USA	APS 0.160 m

Each telescope is equipped with a commercially available CCD camera. The primary survey camera of the Black Bird

Figure 1. Luminance filter images of nearby galaxies from our pilot survey (see Section 3 for discussion) showing large, diffuse light substructures in their outskirts: (a) a possible Sgr-like stream in Messier 63; (b) giant plumes around NGC 1084; (c) partial tidally disrupted satellites in NGC 4216; (d) an umbrella-shaped tidal debris structure in NGC 4651; (e) an enormous stellar cloud in NGC 7531; (f) diffuse, large-scale and more coherent features around NGC 3521; (g) a prominent spike and giant wedge-shaped structure seen emanating from NGC 5866 (BBO 0.5 m); (h) a strange inner halo in NGC 1055, sprinkled with several spikes of debris (RdS 0.5 m). Each panel displays a (linear) super-stretched contrast version of the total image. A color inset of the disk of each galaxy (obtained from data from the same telescope as the luminance images) has been over plotted for reference purposes. In addition, some of the original images were also cropped to better show the most interesting regions around each target.

Προσομοιώσεις & Παρατηρήσεις



Palomar 5

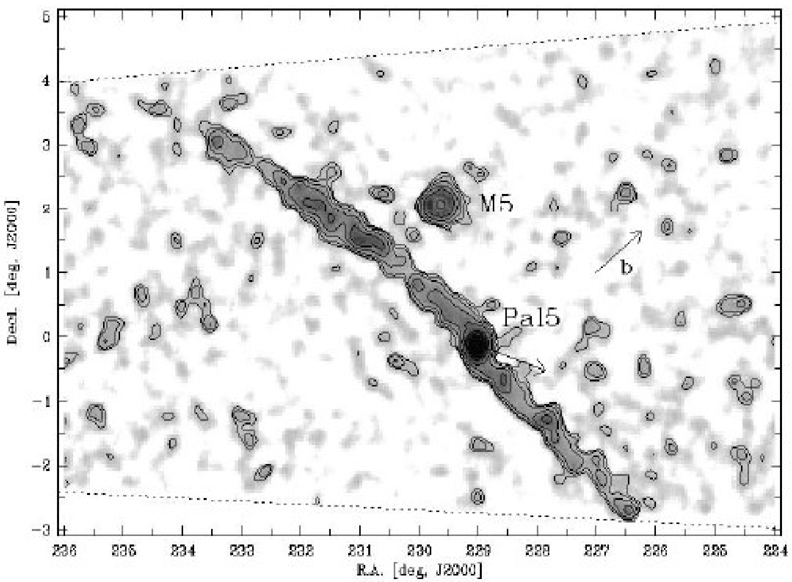
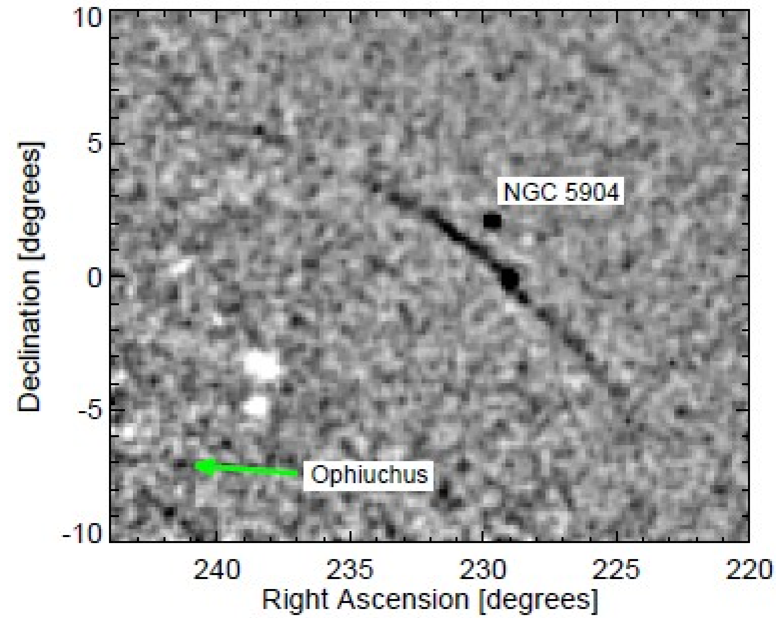
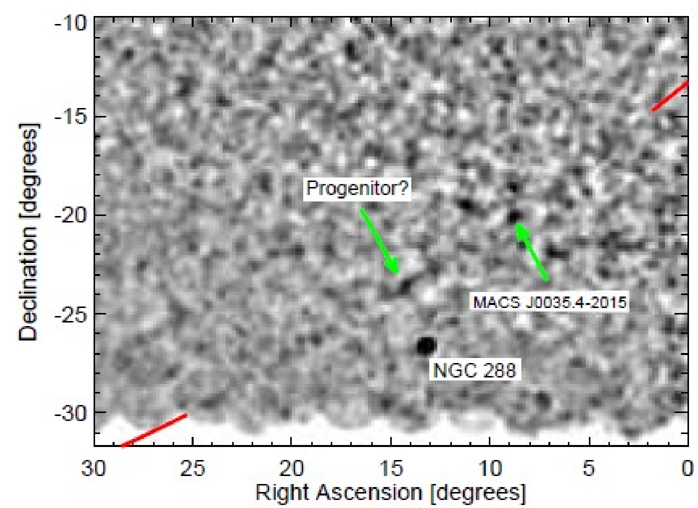


FIG. 3.—Map of the surface density of stars that are photometrically concordant with the stellar population of Pal 5 (plotted in equatorial coordinates R.A., decl.). These surface densities were derived by least-squares estimation as described in § 3.2. The lowest contours show density levels of 1.5 σ, 2 σ, 3 σ, and 5 σ above zero (*white*). Pal 5 is seen to be accompanied by two long tidal tails. The tidal debris covers an arc of almost 10° (for further details, see § 4.1). The arrow attached to Pal 5 gives an approximate indication of the direction of its Galactic motion based on the proper motion measurement by K. M. Cudworth (see § 5.2). The arrow labeled with *b* shows the direction of increasing Galactic latitude. The patch of enhanced density around (229°.6, +2°.1) is a residual feature from the cluster M5 and hence not related to Pal 5. The dotted lines mark the borders of the field.

4 *E. J. Bernard et al.*



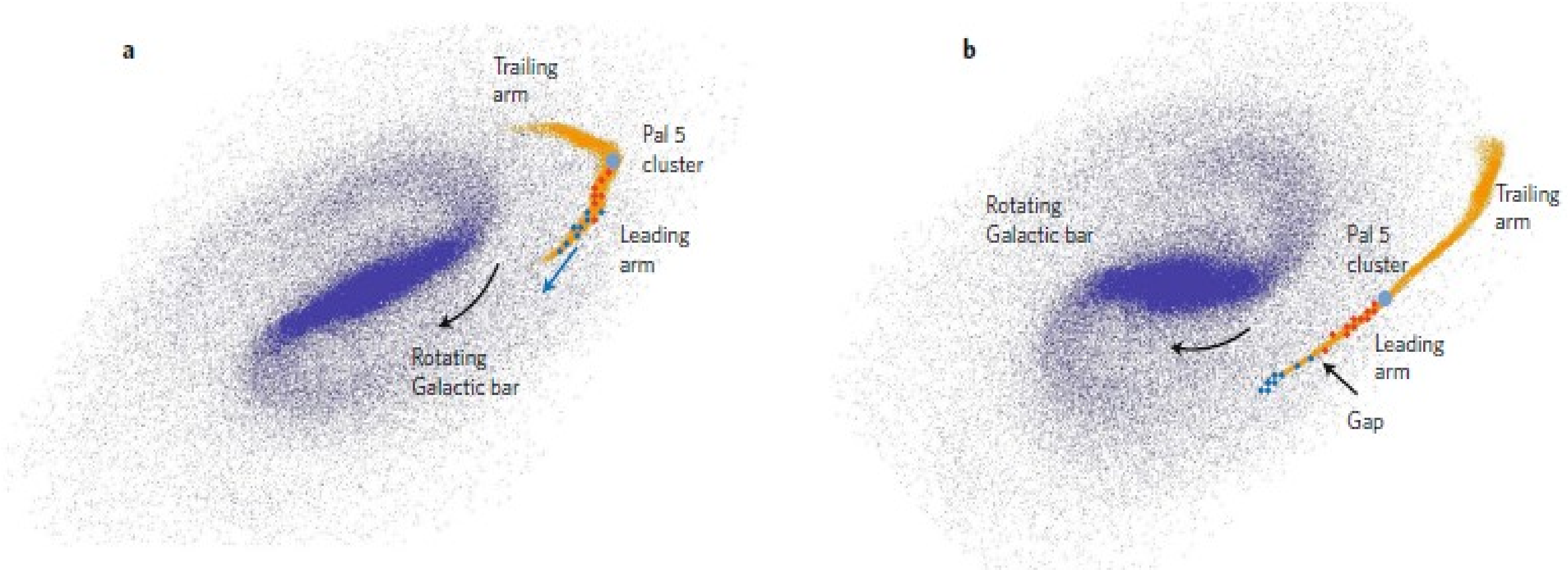


MILKY WAY

Mind the Galactic bar

The length asymmetry of the tidal stellar stream Palomar 5 could have been caused by a past encounter(s) with the Galactic bar, thus limiting its use as a probe for structures in the dark matter halo of the Milky Way.

Christos Efthymiopoulos



Διασύνδεση με το πρόβλημα των "δορυφόρων που διαφέυγουν της παρατήρησης"

Klypin et al. 1999, Moore et al. 1999

Σύμφωνα με το σενάριο της "Ψυχρής Αόρατης Υλης", το περιβάλλον του Γαλαξία αφθονεί σε σκοτεινά αντικείμενα ($\sim 10^3$) μικρής κλίμακας με μάζες ανάμεσα σε 10^6 και 10^{10} M_o, με νόμο πιθανότητας $P(M) \sim M^{-2}$

Σε σύγκριση, παρατηρούνται ~ 20 γαλαξίες νάνοι με μάζες $>10^7$ M_o, και λόγο "Μάζας/Φωτός" ~ 10^3L_o/M_o

(Παραδείγματα: LMC, SMC, Sagittarius, Leo I, II, UM I,2, Draco, Fornax, etc.)

Πιθανές ερμηνείες:

1. Το μοντέλο της ΨΣΥ δεν ισχύει στη γαλαξιακή κλίμακα
2. Τα αντικείμενα όντως υπάρχουν, αλλά δεν παρατηρούνται

Εξέλιξη της Συνάρτησης Κατανομής των Παλλιροϊκών Ρευμάτων

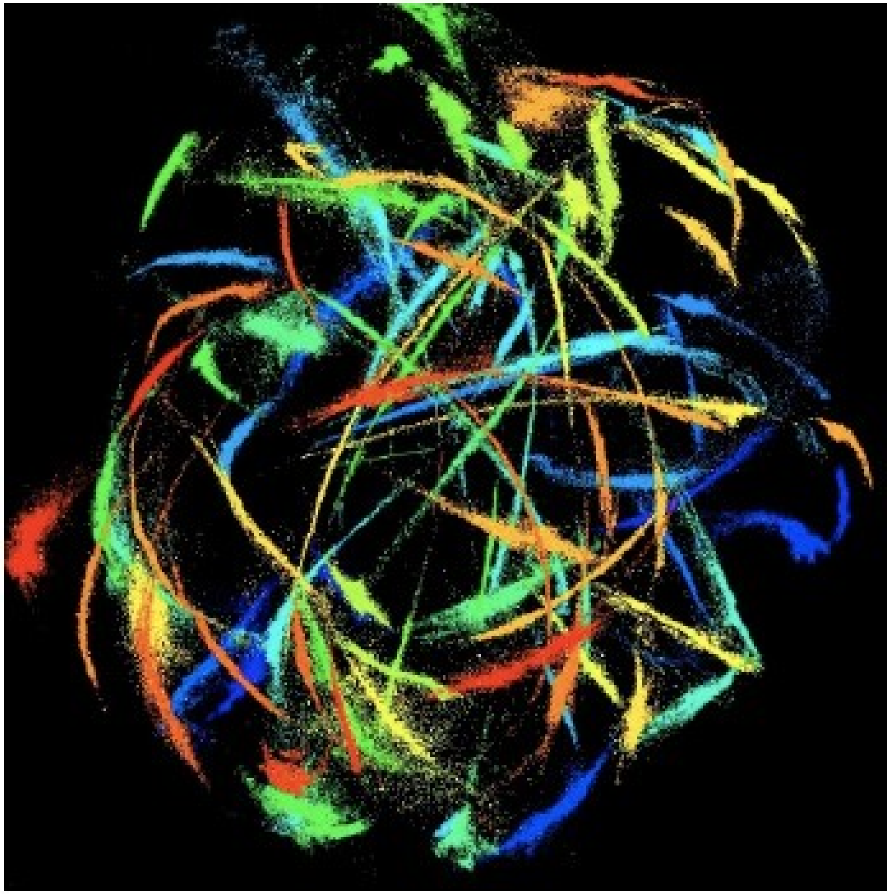


Figure 2. A snapshot of a subset of the Via Lactea Cauda streams during their evolution. This view is 130 kpc by 130 kpc.

Sandford et al. 2017

Ρυθμός "διάλυσης"

Γεωμετρία

Πυκνότητα και κινηματική κατά μήκος των ρευμάτων

Μοντελοποίηση των ρευμάτων από αναλλοίωτες πολλαπλότητες

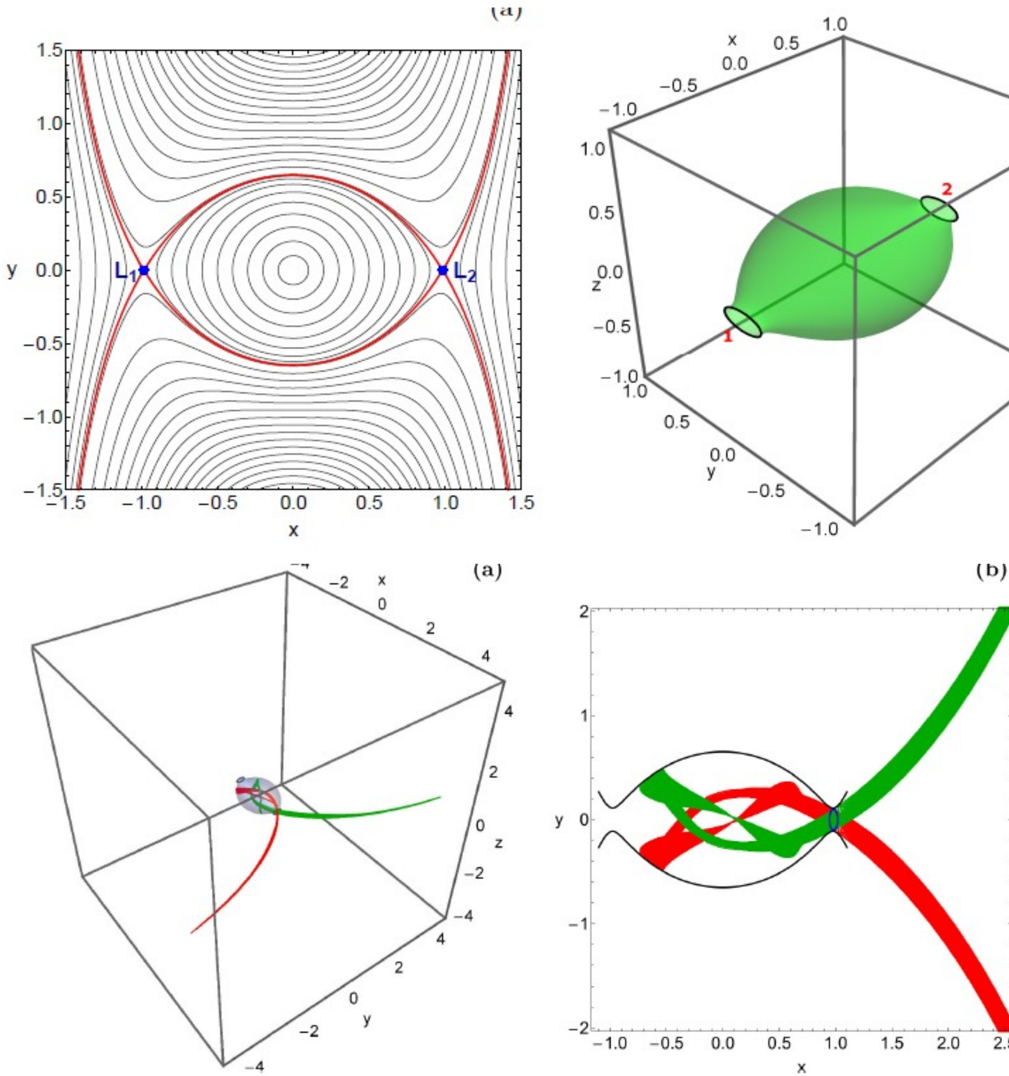
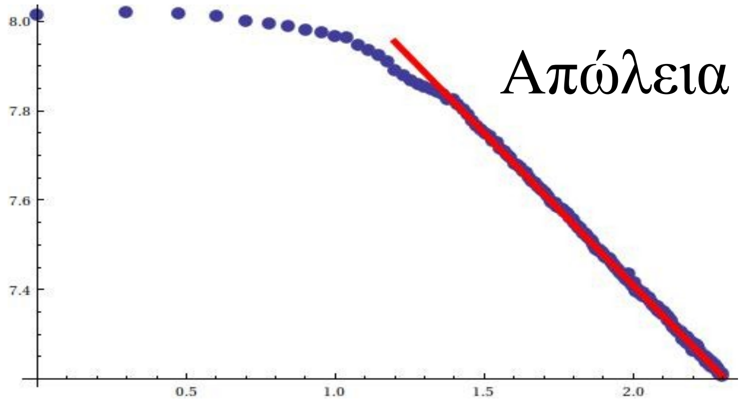


Figure 14. (a-left): The stable manifold $W^s(S_E)$ (green) and the unstable manifold $W^u(S_E)$ (red), when $E = -3.24$. The corresponding energetically allowed region of the position space in the inner part of the potential is shown in transparent gray colour. (b-right): The projection of the stable and the unstable manifold on the configuration (x, y) space. The corresponding horizontal Lyapunov orbit Γ_h is shown in blue. (For the interpretation of references to colour in this figure caption and the corresponding text, the reader is referred to the electronic version of the article.)

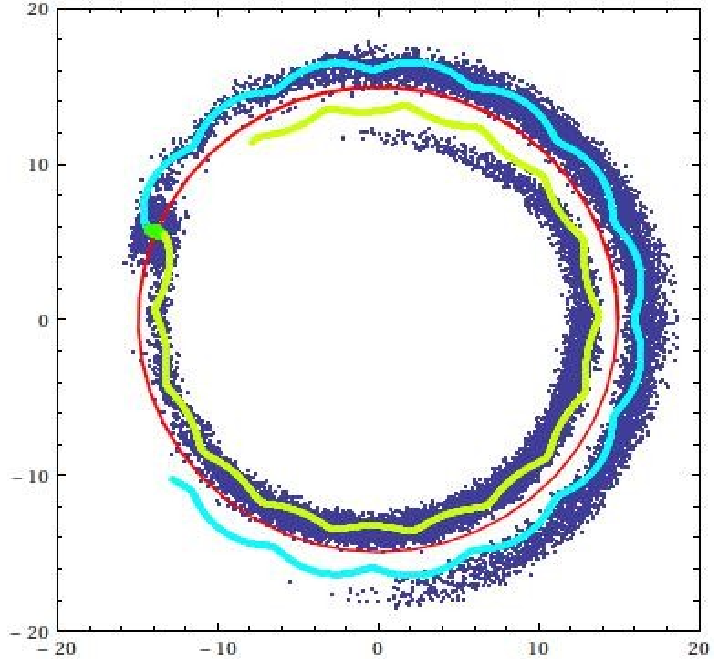
Jung et al. 2017
Barrabes et al. 2017

Ερμηνεία της αδιαβατικής εξέλιξης των ρευμάτων "μέσω" των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων

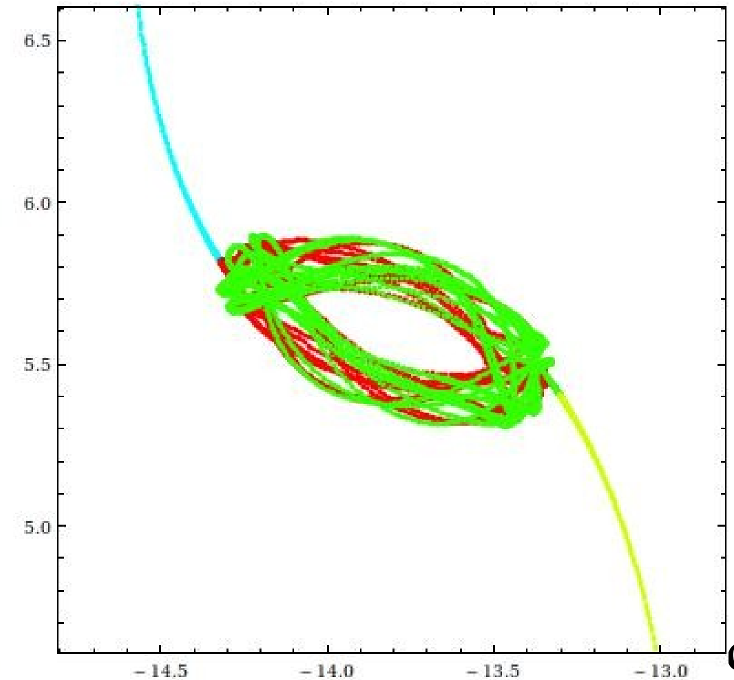


Απώλεια μάζας στο χρόνο

Αδρανειακό σύστημα



Τοπικό σύστημα



Σχηματισμός πρωτοπλανητών

On the Origin of the Planetary Spin by Accretion of Planetesimals

II. Collisional Orbits at the Hill Surface

K. TANIKAWA

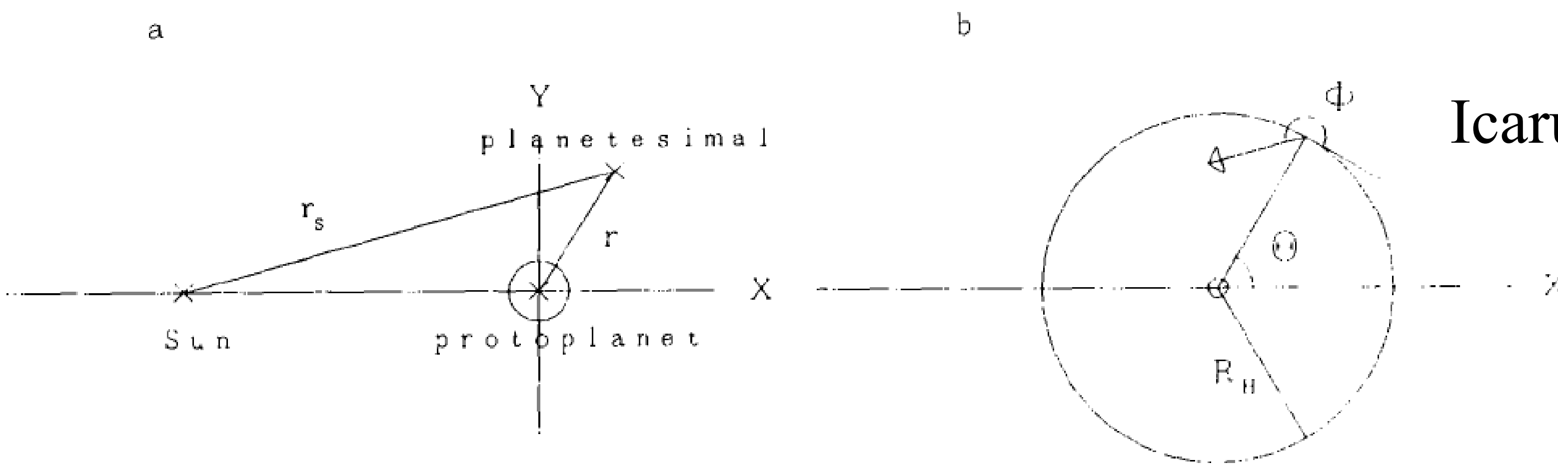
Division of Theoretical Astrophysics, National Astronomical Observatory, Mitaka, Tokyo 181, Japan

AND

N. KIKUCHI AND I. SATO

Division of Theoretical Astrophysics, National Astronomical Observatory, Mizusawa, Iwate 023, Japan

Received January 21, 1991; revised July 26, 1991



Icarus 1991

FIG. 1. Geometry of the problem. (a) The coordinate system and configuration. (b) The definition of Θ and Φ. R_H is the Hill radius.

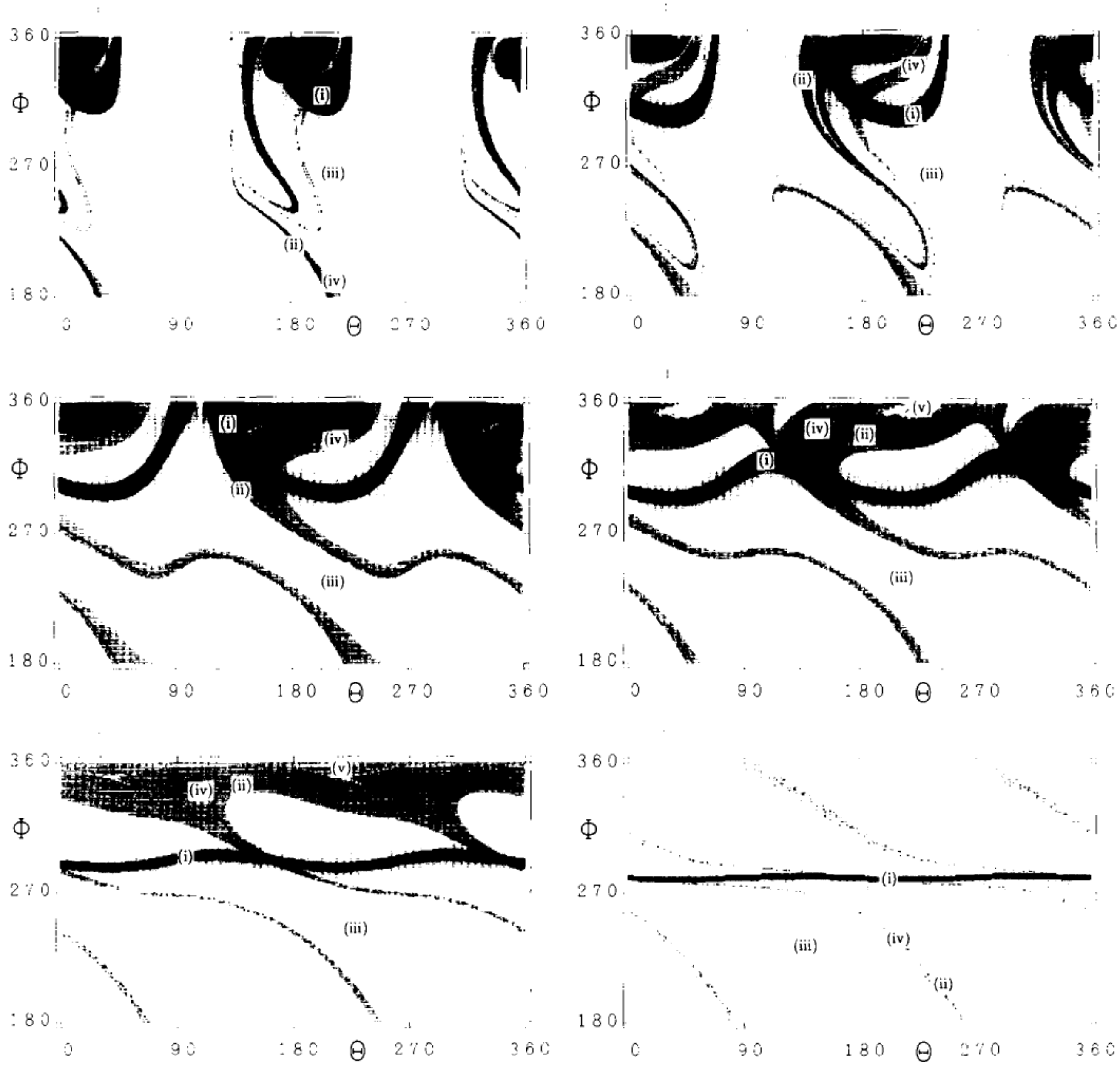


FIG. 3. (Θ, Φ) plane structure for $\mu = 10^{-6}$, $R = 2 \times 10^{-5}$. (a) $C = 3.00035$, (b) $C = 3.00030$, (c) $C = 3.00025$, (d) $C = 3.00020$, (e) $C = 3.00000$, (f) $C = 2.99900$. (i), (ii), . . . , (v) are the same as in Fig. 2. In (e), delayed colliders are dispersed crosses (+) embedded in the set of delayed escapers.

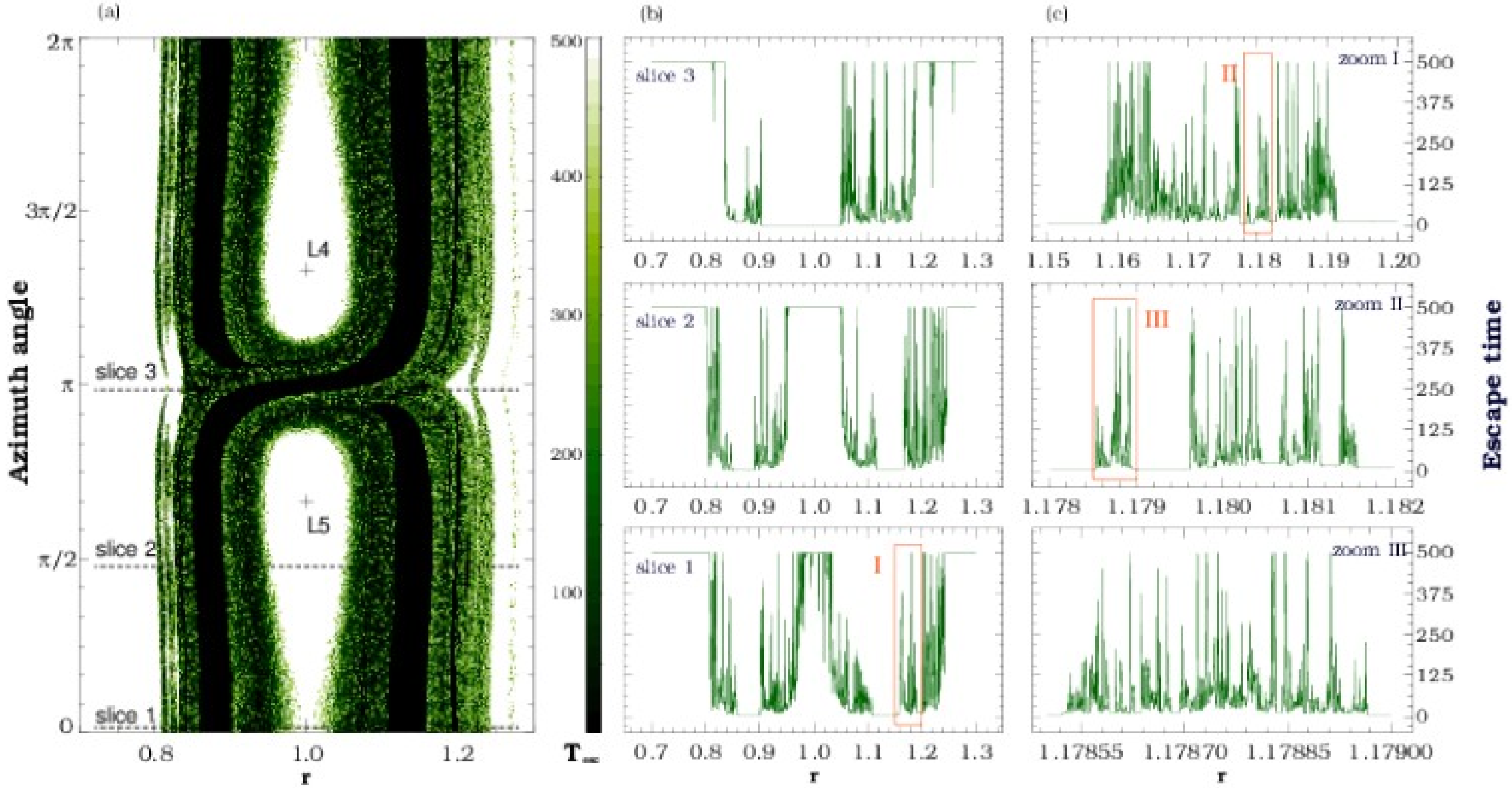


FIG. 1.— Escape times indicated with different colors from the annulus $0.7 \leq r \leq 1.3$. The integration time is $T = 500$ orbital revolution of the planet. Filamentary structure is formed at the border of the white regular domains (high escape times), the black trails correspond to very fast escape (accretion). Panel (b) shows the spike structure of the escape times in radial direction obtained at different azimuthal positions in panel (a). The number of long lived trajectories increases when approaching the edge of regular plateaus. Panel (c) contains magnifications of slice 1 denoted by red rectangles (I,II,III).

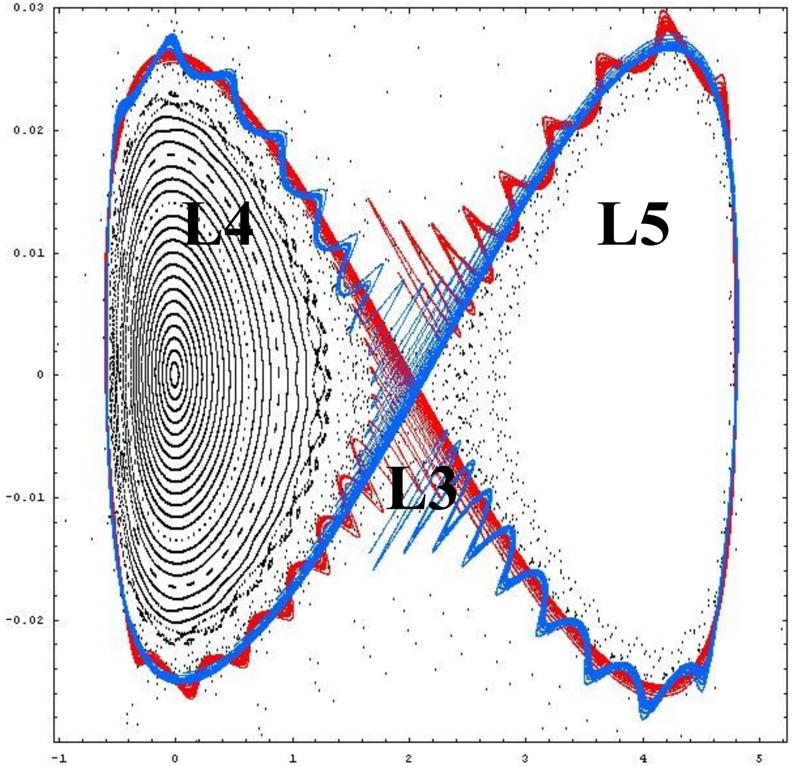
Kovacs & Regaly, ApJ 2015

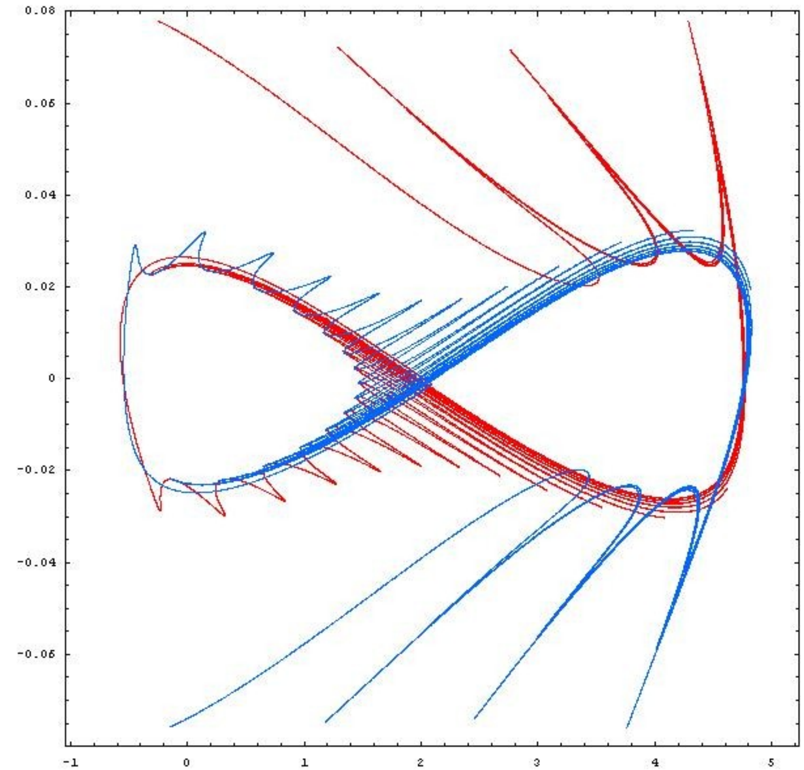
Σύλληψη και διαφυγή Τρωικών Αστεροειδών

Astrodynamics group Vienna + C.E., see also Koon et al. 2001b, di Sisto et al 2016)

$\sqrt{a}-1$

e=0.3





σ

Δυναμικό "Ανοιγμα Δέσμης" σε επιταχυντές σωματιδίων

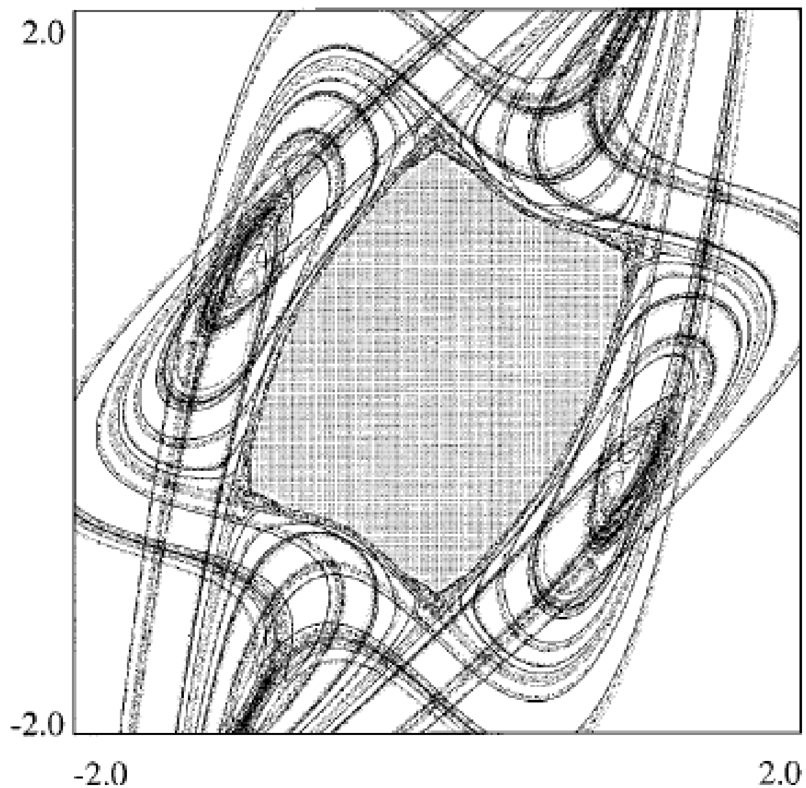


FIG. 2. Invariant manifolds of the hyperbolic fixed points of period one and stability domain for the cubic map. The stability domain is represented by the gray area. The value of the linear frequency is $\omega/2\pi = 0.34$, while $p_3 = -1$.

Giovannozi 1996

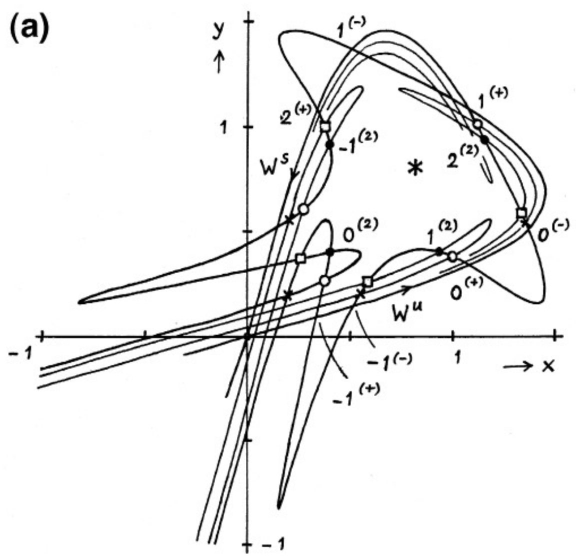
Διάδοση Παλμών σε μη-γραμμικά Μέσα

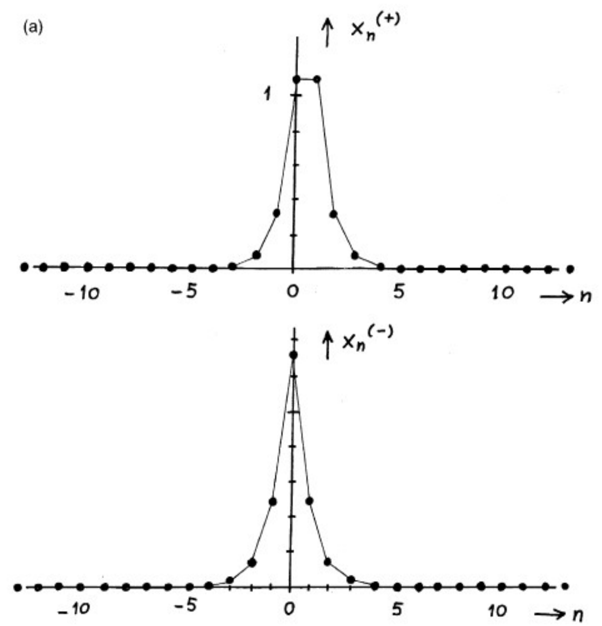
Multibreathers and homoclinic orbits in 1-dimensional nonlinear lattices

T. Bountis [a,*], H.W. Capel [b], M. Kollmann [b], J.C. Ross [b], J.M. Bergamin [a,c], J.P. van der Weele [c]

$$i\dot{u}_n + \gamma|u_n|^2 u_n + \left(1+|u_n|^2\right)(u_{n+1}+u_{n-1}) = 0, \qquad u_n = \phi_n \exp(\mathrm{i}\,\omega t)$$

$$\phi_{n+1}+\phi_{n-1} = \frac{\omega-\gamma|\phi_n|^2}{1+|\phi_n|^2}\phi_n \qquad x_{n+1} = \frac{\omega-\gamma x_n^2}{1+x_n^2}x_n - y_n, \quad y_{n+1} = x_n$$





Propagation of extremely short electromagnetic pulses in a doubly-resonant medium

Y. Frenkel[a], I. Gabitov[b], A. Maimistov[c], and V. Roytburd[a]

$$\nabla \times \vec{E} = -c^{-1}\vec{B}_t, \quad \nabla \times \vec{H} = -c^{-1}\vec{D}_t \tag{2.1}$$
$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

For simplicity, we consider transverse electromagnetic plane waves propagating along the z-axis with the electric field $\vec{E} = (E(z,t),0,0)$ and the magnetic field $\vec{B} = (0,B(z,t),0)$. Then the Maxwell equations transform to the scalar form:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = 0 \tag{2.2}$$
$$B = H + 4\pi M, \quad D = E + 4\pi P \tag{2.3}$$

Εξισώσεις "Πόλωσης - Μαγνήτισης"

$$P_{tt} + \omega_D^2 P + \kappa P^3 = \omega_p^2 E$$

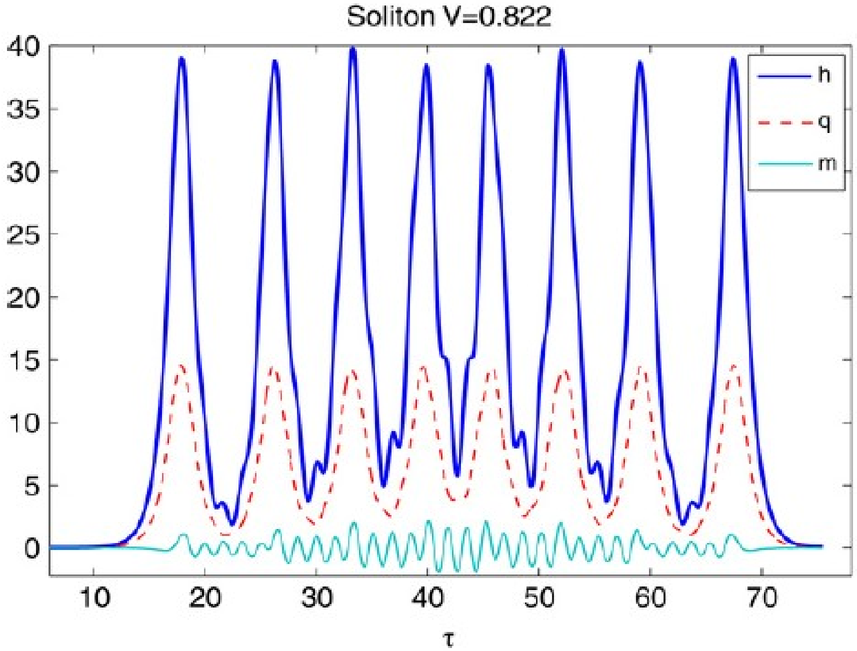
$$M_{tt} + \omega_T^2 M = -\beta H_{tt}$$

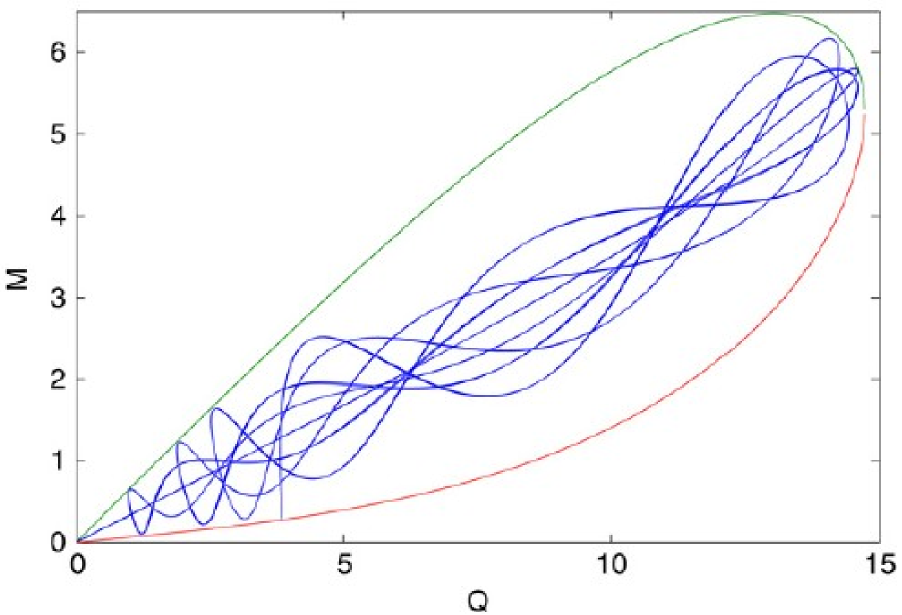
"Συναφές σύστημα" σε αδιάστατες μεταβλητές

$$\frac{d}{d\zeta}\begin{bmatrix} Q \\ M \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -A_{11} & -A_{12} & 0 & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q \\ M \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma Q^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\zeta/\zeta_0 = t - z/c$

Αντιστοίχιση Σολιτονικών Λύσεων με τις ομοκλινικές τροχιές του αντίστοιχου συναφούς συστήματος





Μέθοδοι υπολογισμού των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων

Αριθμητική διάδοση αρχικών συνθηκών

Χρήση "δυναμικών αλγορίθμων"
(π.χ. μέθοδος των "σταγονιδίων", χρήση των "ταχέων δεικτών Lyapunov")

Αναλυτικές μέθοδοι (υπερβολικές σειρές Birkhoff - Moser - παραμετροποίηση)

Evolution of the tangent vectors and localization of the stable and unstable manifolds of hyperbolic orbits by Fast Lyapunov Indicators

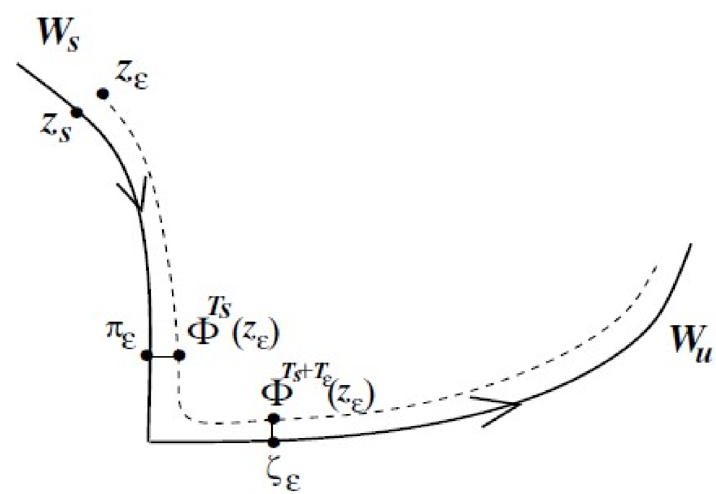
Massimiliano Guzzo
Dipartimento di Matematica
Via Trieste, 63 - 35121 Padova, Italy
guzzo@math.unipd.it

Elena Lega
Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS UMR 7293
Observatoire de la Côte d'Azur
Bv. de l'Observatoire, B.P. 4229, 06304 Nice cedex 4, France
elena.lega@oca.eu

M. Guzzo and E. Lega, 2014, 2016, 2018

$$l_1 = \ln \|v\| \quad , \quad l_{j+1} = l_j + u(z_j) \ln \frac{\|D\Phi_{z_j} v_j\|}{\|v_j\|}$$

$u(z) = 1$ for $z \in \overline{\mathcal{B}}$, and $u(z) = 0$ for z outside a given open set $V \supseteq \mathcal{B}$



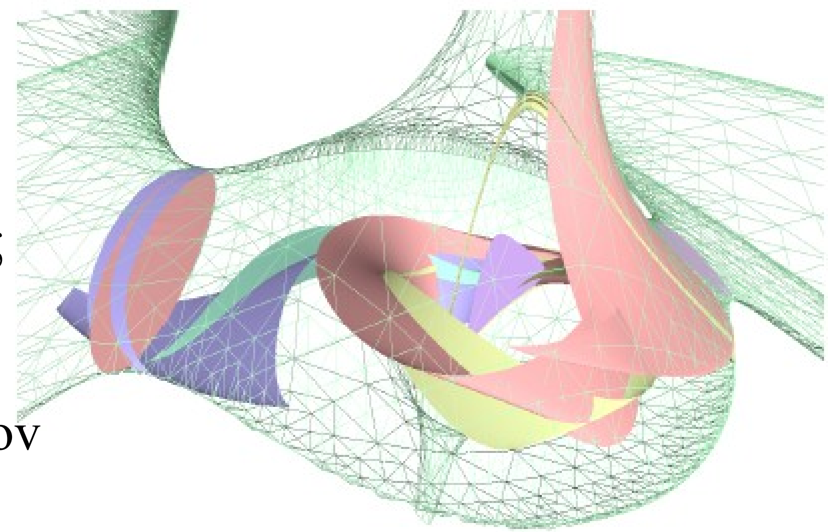
Evolution of the tangent vectors and localization of the stable and unstable manifolds of hyperbolic orbits by Fast Lyapunov Indicators

Massimiliano Guzzo
Dipartimento di Matematica
Via Trieste, 63 - 35121 Padova, Italy
guzzo@math.unipd.it

Elena Lega
Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS UMR 7293
Observatoire de la Côte d'Azur
Bv. de l'Observatoire, B.P. 4229, 06304 Nice cedex 4, France
elena.lega@oca.eu

M. Guzzo and E. Lega, 2014, 2016, 2018

Μικρό τμήμα της ευσταθούς πολλαπλότητας της επίπεδης τροχιάς Lyapunov γύρω από το σημείο L1 που τέμνει την ασταθή πολλαπλότητα της επίπεδης τροχιάς Lyapunov L2 στο ΚΠΠ3Σ



Representation in the phase-space

Μέθοδος των Σειρών

Παράδειγμα: διδιάστατη αναλυτική απεικόνιση της μορφής

$$u_1' = \lambda_1 u_1 + F_2(u_1, u_2) + F_3(u_1, u_2) + \ldots$$
$$u_2' = \lambda_2 u_2 + G_2(u_1, u_2) + G_3(u_1, u_2) + \ldots$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 1/\lambda_1}$

Κανονικός μετασχηματισμός σε νέες μεταβλητές

$$u_1 = \Phi_1(\xi, \eta) = \xi + \Phi_{1,2}(\xi, \eta) + \Phi_{1,3}(\xi, \eta) + \ldots$$
$$u_2 = \Phi_2(\xi, \eta) = \eta + \Phi_{2,2}(\xi, \eta) + \Phi_{2,3}(\xi, \eta) + \ldots$$

Μορφή της απεικόνισης στις νέες μεταβλητές

$$\xi' = W_1(\xi, \eta) = \Lambda(c)\xi = (\lambda_1 + w_2 c + w_3 c^2 + \ldots)\xi$$
$$\eta' = W_2(\xi, \eta) = (1/\Lambda(c))\eta = (\lambda_2 + v_2 c + v_3 c^2 \ldots)\eta$$

$$\mathbf{c = \xi\,\eta = \xi'\,\eta'}$$

Ομολογική εξίσωση

$$M \circ \Phi = \Phi \circ W$$

Λύση (θέτοντας $\lambda_1 = e^\nu$)

$$\begin{aligned}-e^\nu \Phi_{1,r}(\xi,\eta) &+& \Phi_{1,r}(e^\nu \xi, e^{-\nu}\eta) + W_{1,r} \\ &=& \left[F^{\leq r-1}(\Phi_1^{\leq r-1}, \Phi_2^{\leq r-1}) - \Phi_1^{\leq r-1}(W_1^{\leq r-1}, W_2^{\leq r-1})\right]_r\end{aligned}$$

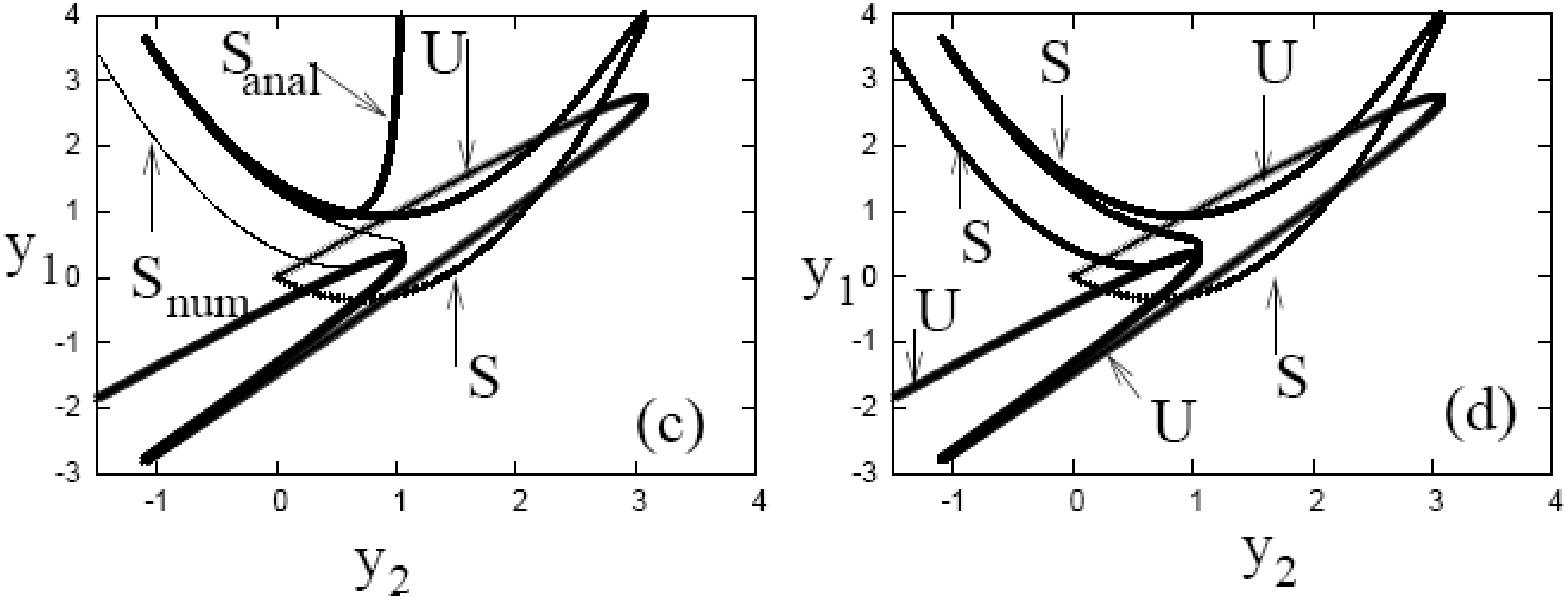
$$\left[F^{\leq r-1}(\Phi_1^{\leq r-1}, \Phi_2^{\leq r-1}) - \Phi_1^{\leq r-1}(W_1^{\leq r-1}, W_2^{\leq r-1})\right]_r = \sum_{m+n=r} b_{m,n}\xi^m\eta^n$$

$$\Phi_{1,r} = \sum_{m+n=r} \frac{b_{m,n}}{e^{(m-n)\nu}-e^\nu}\xi^m\eta^n, \qquad W_{1,r} = 0 \qquad r \text{ even}$$

$$\Phi_{1,r} = \sum_{m+n=r, m\neq n+1} \frac{b_{m,n}}{e^{(m-n)\nu}-e^\nu}\xi^m\eta^n, \qquad W_{1,r} = b_{(r+1)/2,(r-1)/2}\xi^{\frac{r+1}{2}}\eta^{\frac{r-1}{2}} \qquad r \text{ odd}$$

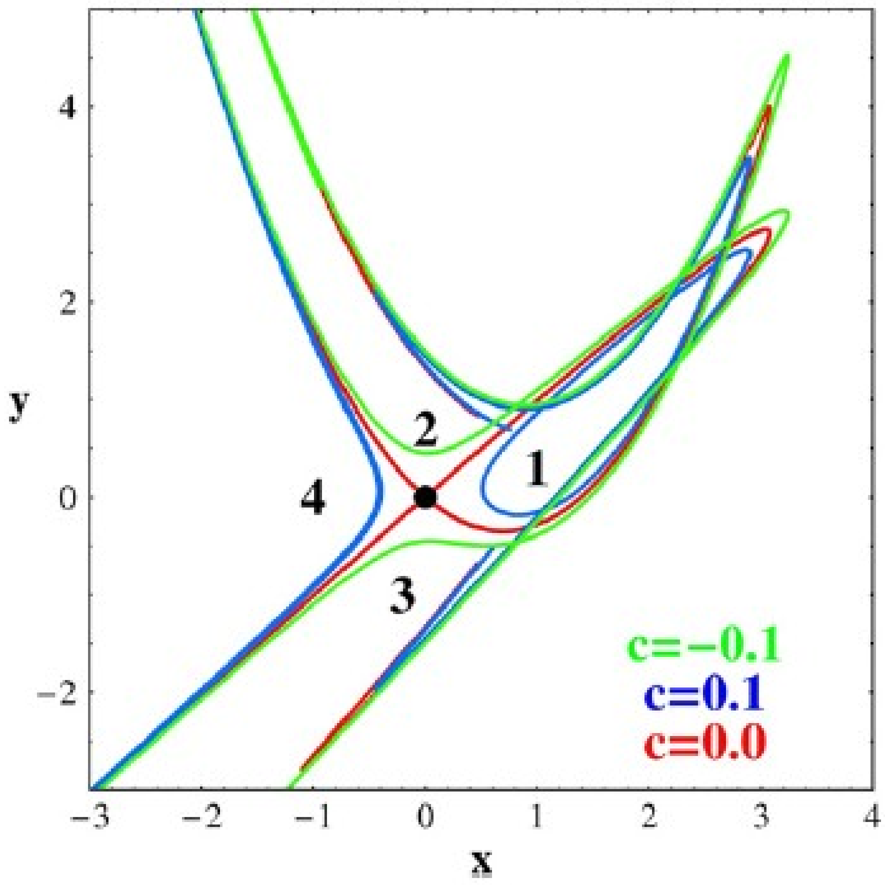
Ανυπαρξία μικρών παρονομαστών!

Franceschini, V., and Russo, L. (1981)
da Silva Ritter, Vieira, Ozorio de Almeida (1987)



$$x_1' = e^a\left(x_1 - (x_1+x_2)^2/4\right)$$
$$x_2' = e^{-a}\left(x_2 + (x_1+x_2)^2/4\right)$$

α=1.46



Harsoula et al. 2015

Figure 1. The asymptotic curves $c = \xi\eta = 0$ (red, mapped in the original variables (x, y)) from the unstable periodic orbit ($x = y = 0$) and the nearby invariant curves with $c = 0.1$ (1 and 4), or $c = -0.1$ (2 and 3).

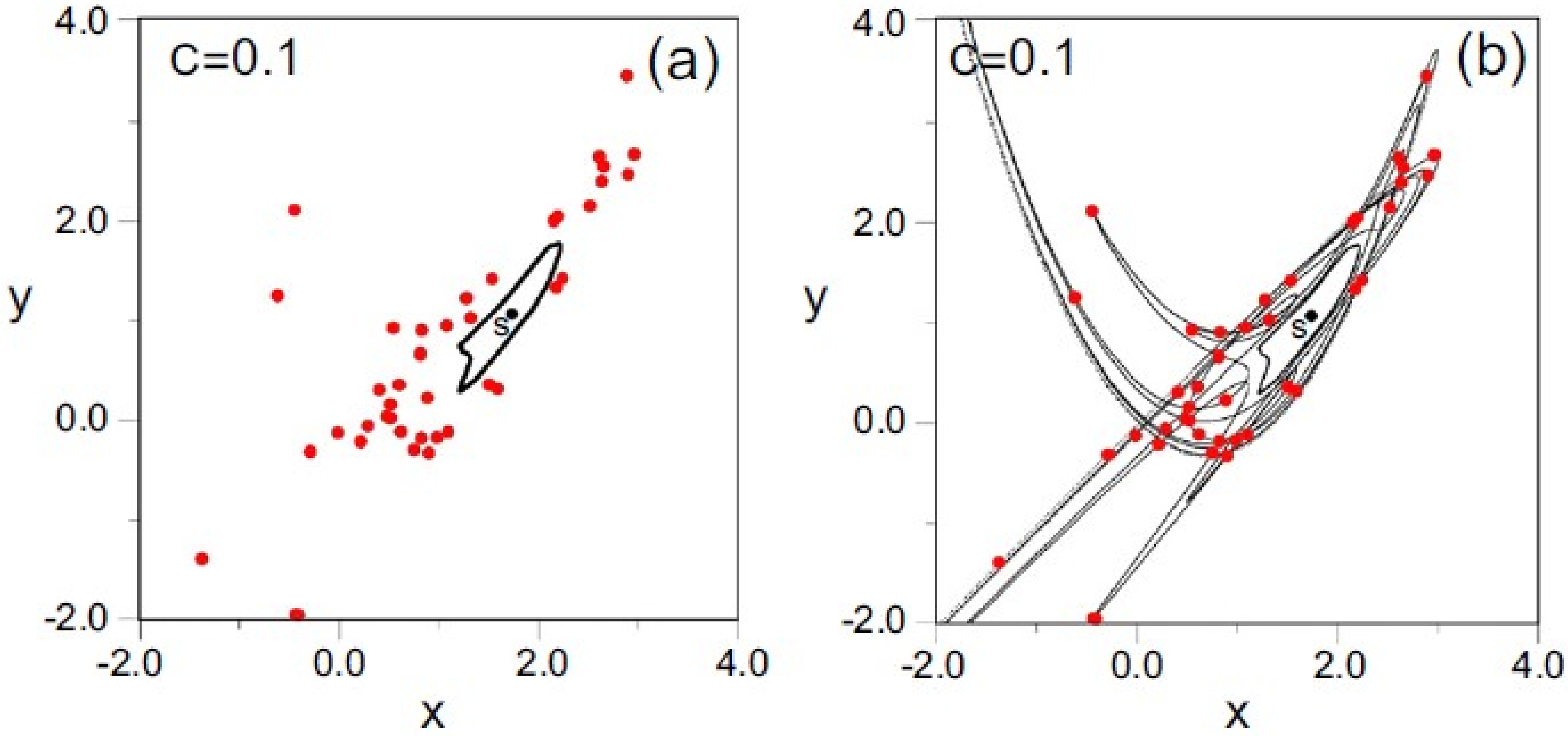
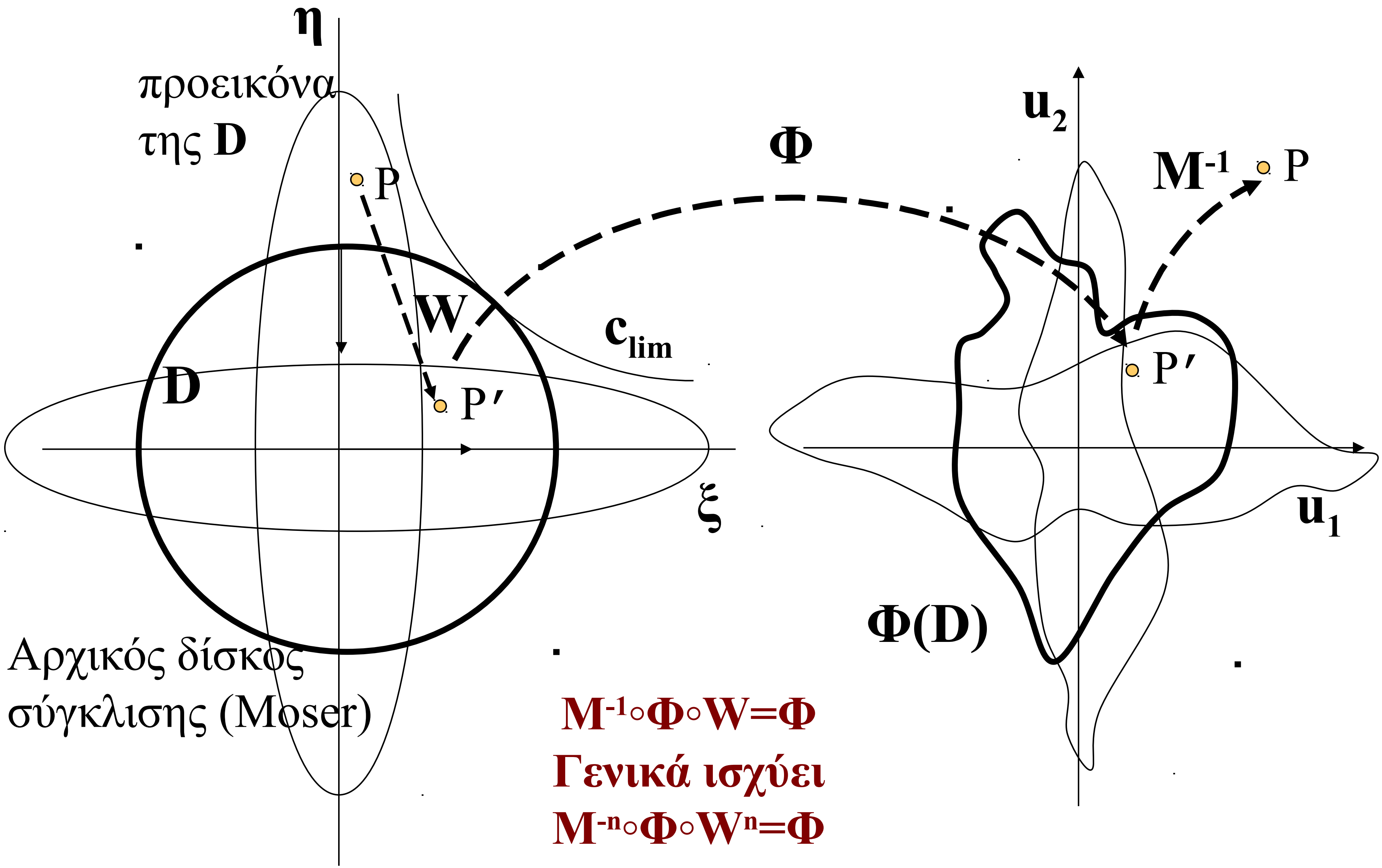


Figure 3. (a) The successive iterations of two orbits having initial points on the invariant curve $c = 0.1$ seem to be distributed randomly around the last KAM curve of a central island of stability (b) the scattered points of figure 3(a) belong in fact to the invariant curve $c = 0.1$.

Επέκταση της σύγκλισης



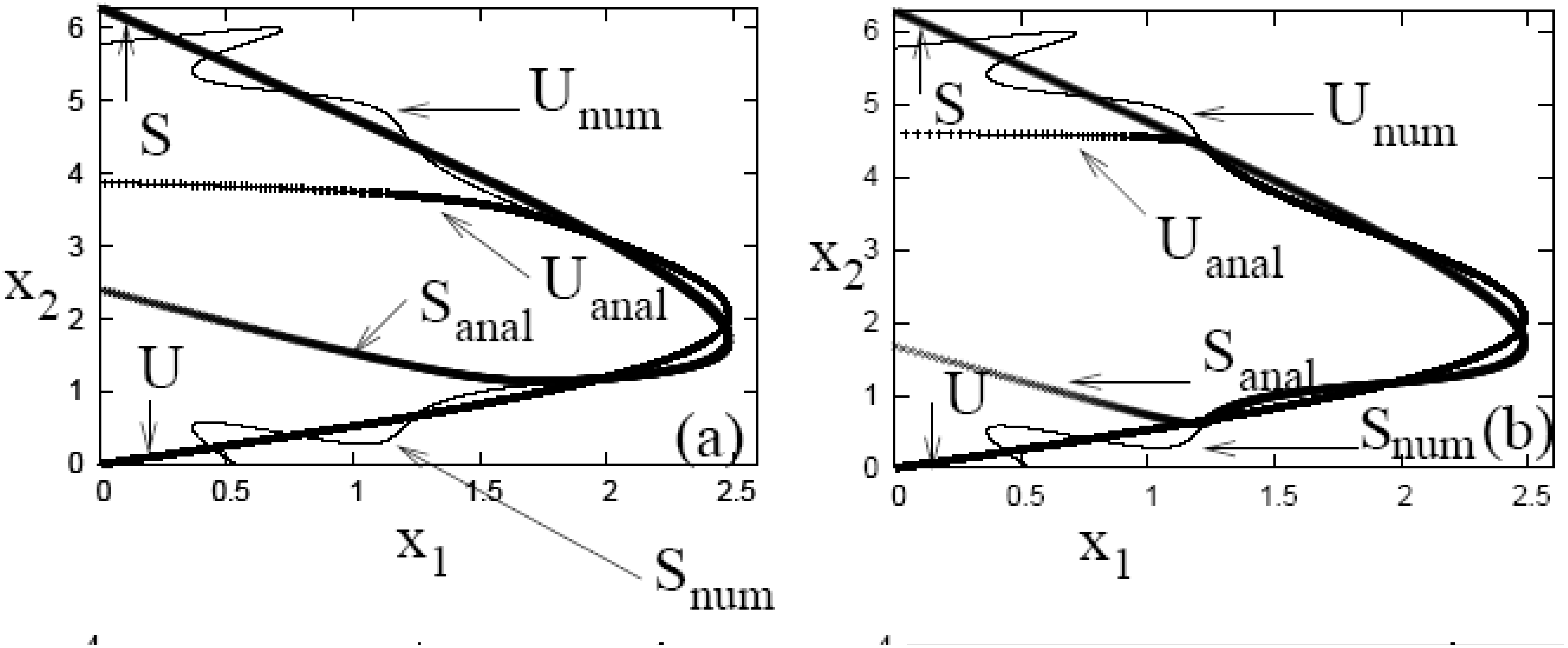
$M^{-1} \circ \Phi \circ W = \Phi$

Γενικά ισχύει

$M^{-n} \circ \Phi \circ W^{n} = \Phi$

εντός του τομέα αναλυτικότητας της M^{-1}

Τυπική απεικόνιση



$$x_1' = x_1 + K\sin(x_1 + x_2)$$

$$x_2' = x_1 + x_2$$

“Ακολουθία ακτίνων D’Alembert”:

λογαριθμική στην τυπική απεικόνιση, τετραγωνική στην απεικόνιση Hénon

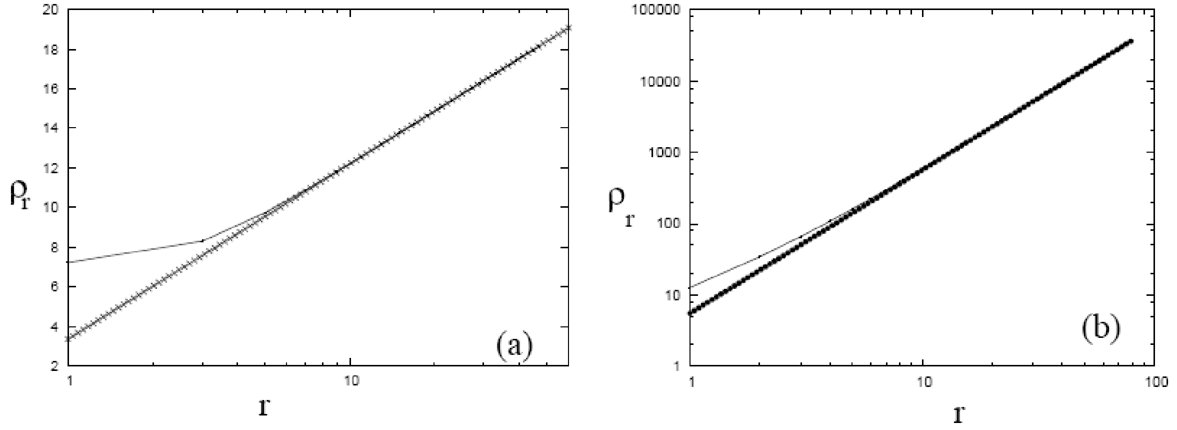
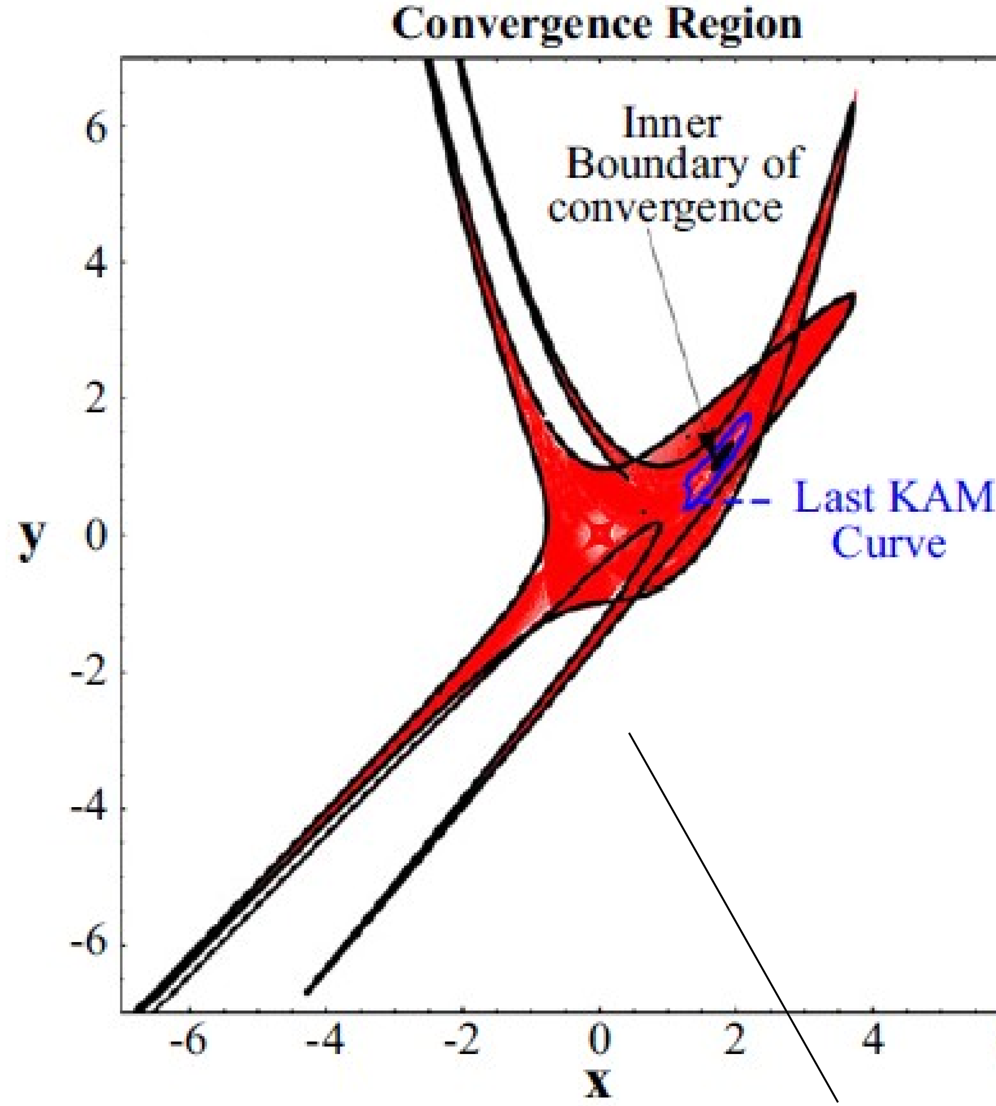


Figure 2: The sequence of D’Alembert radii found by the coefficients of the normalizing transformation Φ_1 for $\eta = 0$ (see text), versus the normalization order r for (a) the standard map, and (b) the Hénon map. In (a) we find the fitting law $\rho_r = 3.34966 + 3.83952\log(r)$. In (b), we find a power fitting law $\rho_r = 5.52r^{2.01}$ (thick lines).

Γενικά, το πλήθος των όρων της σειράς που απαιτούνται ώστε να αναπαραχθεί με ακρίβεια μια χαοτική σειρά μήκους s αυξάνει με το νόμο ~ **exp(s)**



Σύνορο του τομέα σύγκλισης: Λειτουργεί ως **ελκυστής χαοτικών τροχιών εκτός του τομέα**

Χαμιλτονιανή περίπτωση

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2(1 + \epsilon(1+p)\cos\omega t)\cos\psi$$

$$H(\psi, \phi, p, I) = \frac{p^2}{2} + \omega I - \omega_0^2(1 + \epsilon(1+p)\cos\phi)\cos\psi$$

$$H = \frac{p^2}{2} + I - 0.08\left(1 + 0.5\epsilon(1+p)(e^{i\phi} + e^{-i\phi})\right)\left(-1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{24} - \ldots\right)$$

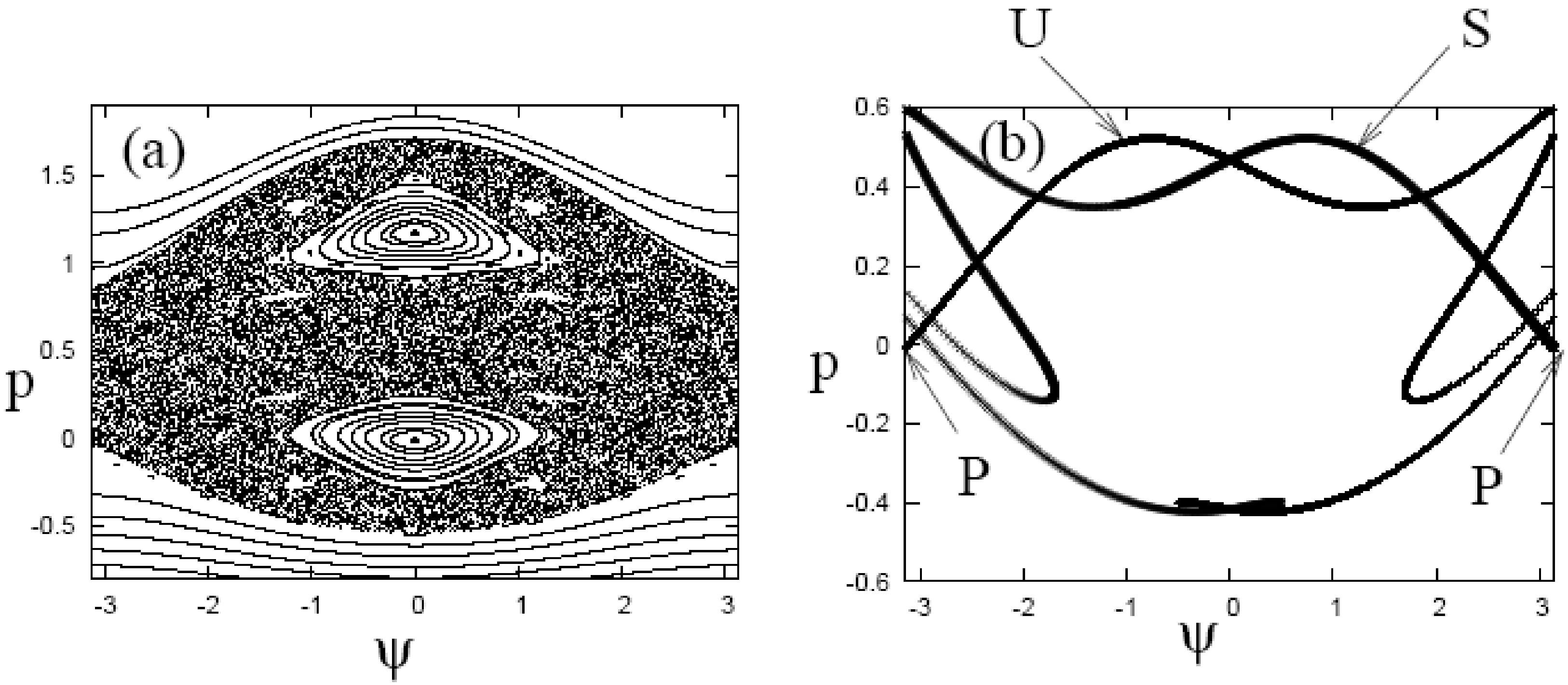
Μεταβλητές Birkhoff - Moser

$$p = \frac{\sqrt{\nu}(\xi + \eta)}{\sqrt{2}}, \quad u = \frac{(\xi - \eta)}{\sqrt{2\nu}}$$

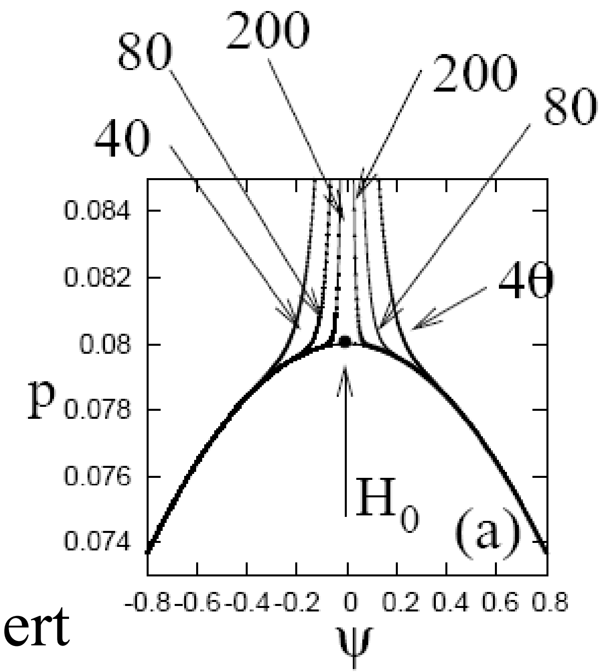
$$H(\phi, I, \xi, \eta) = \omega I + \nu\xi\eta + H_1(\phi, I, \xi, \eta)$$

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 (1 + \epsilon(1+p)\cos\omega t)\cos\psi$$

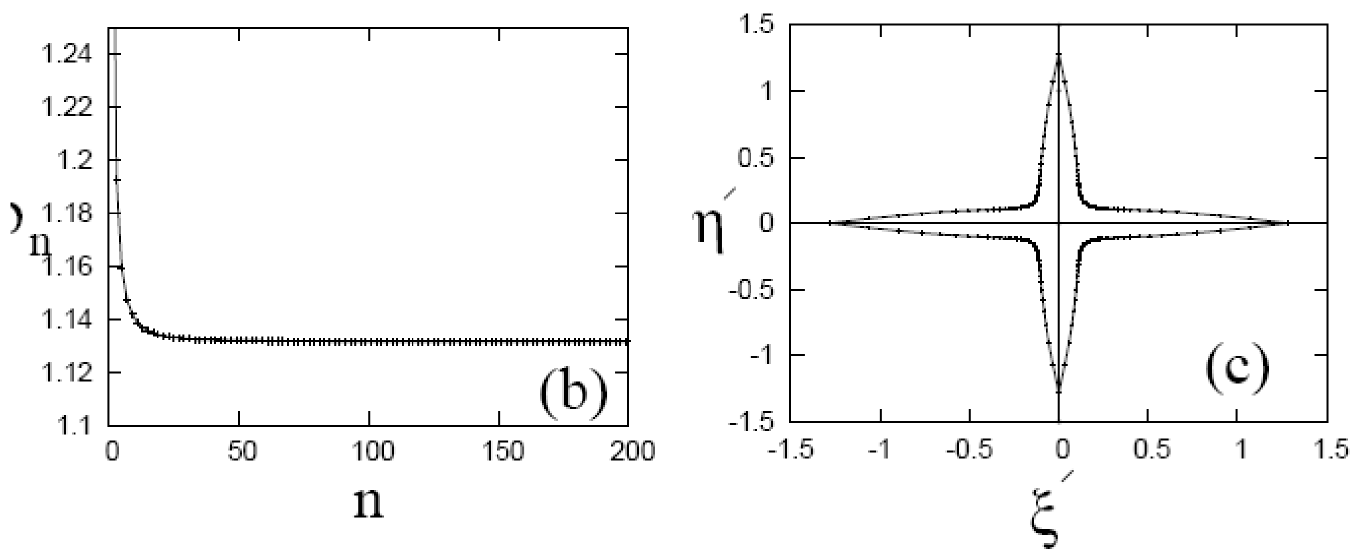
$$H(\psi, \phi, p, I) = \frac{p^2}{2} + \omega I - \omega_0^2 (1 + \epsilon(1+p)\cos\phi)\cos\psi$$



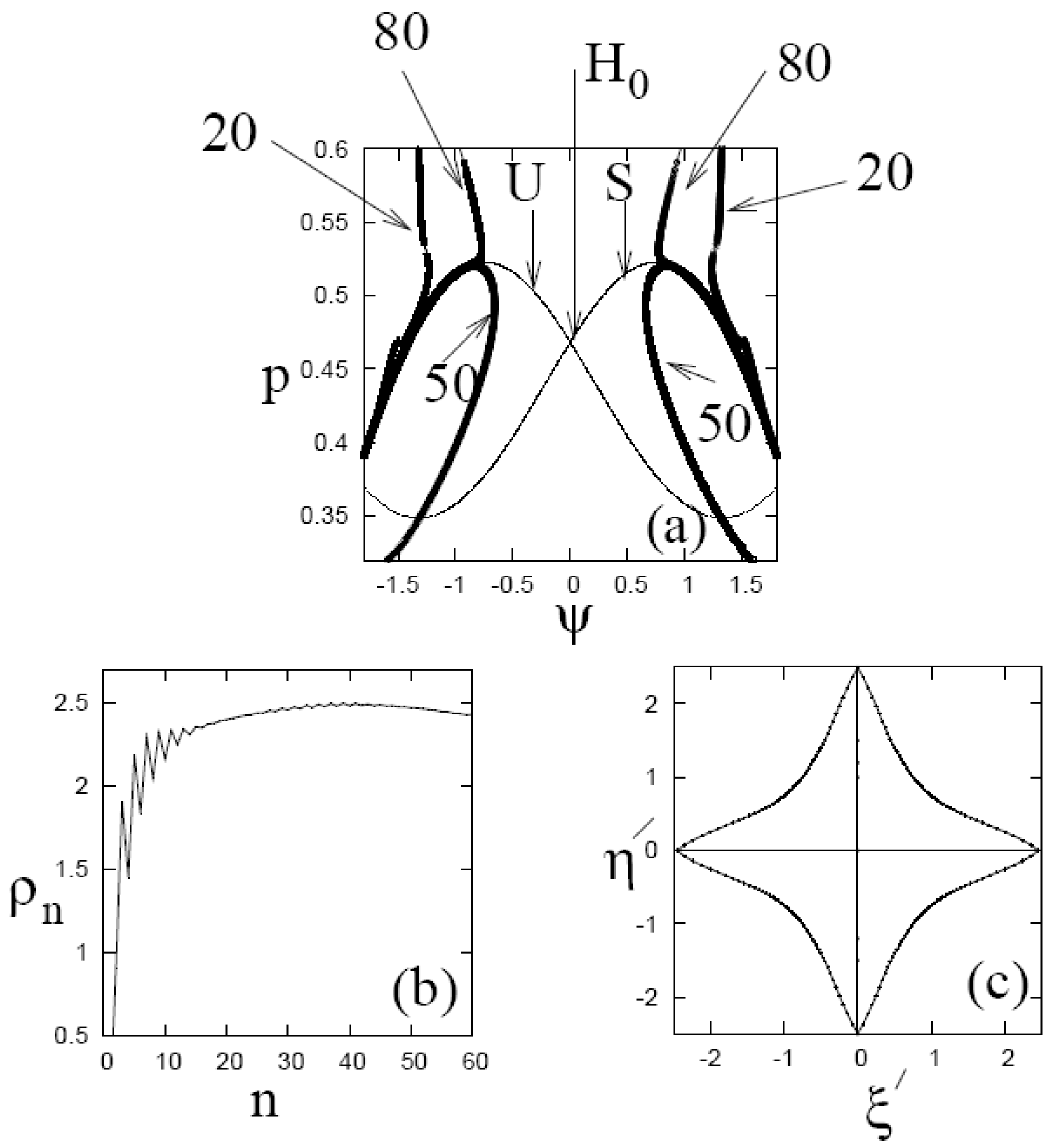
<u>Οριο σύγκλισης στο απλό εκκρεμές</u>



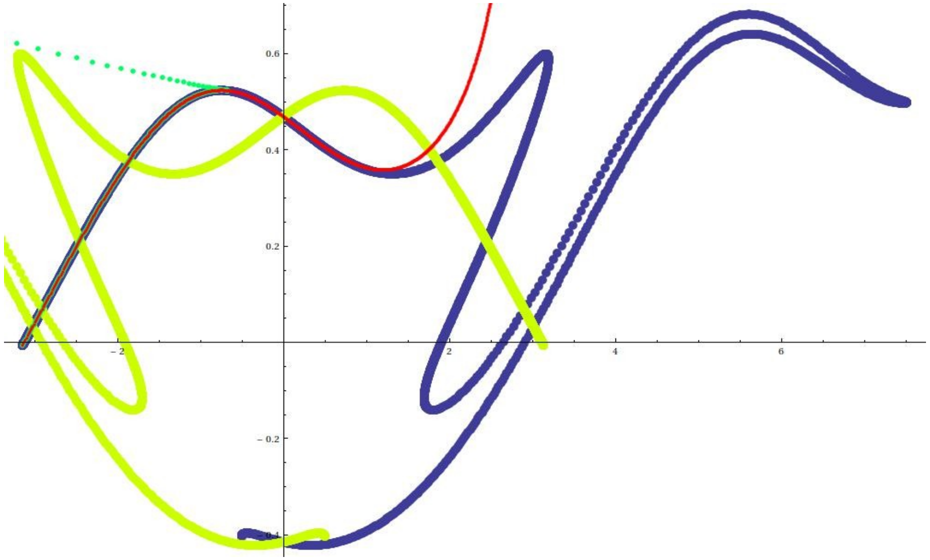
Ακολουθία D’Alembert



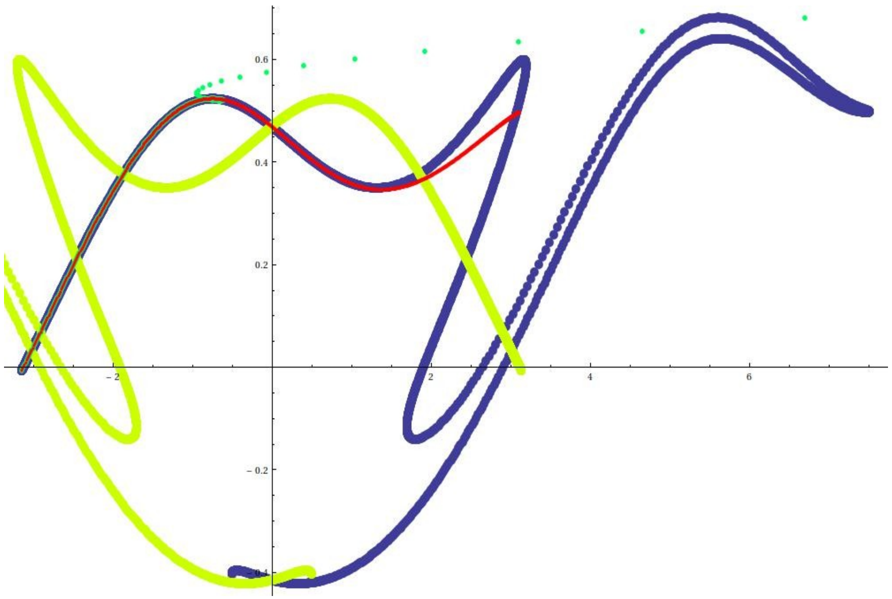
Ορια σύγκλισης στο εκκρεμές με περιοδική διέγερση



Μέθοδοι "επανάθροισης" με τη χρήση συνεχών κλασμάτων (Bender & Wu)

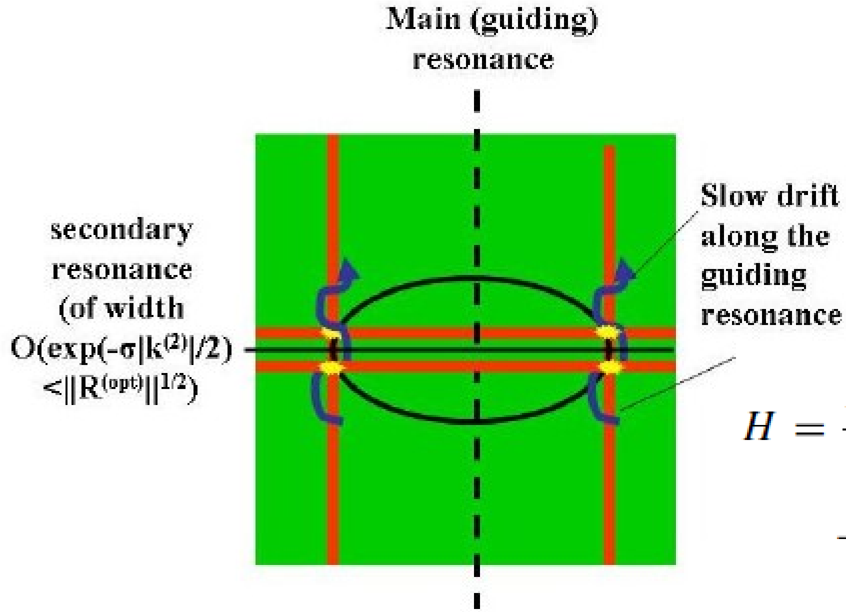


re-summed series
truncated at order 20

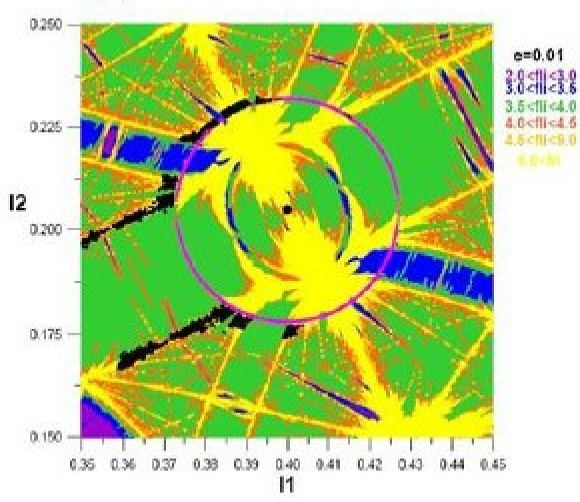


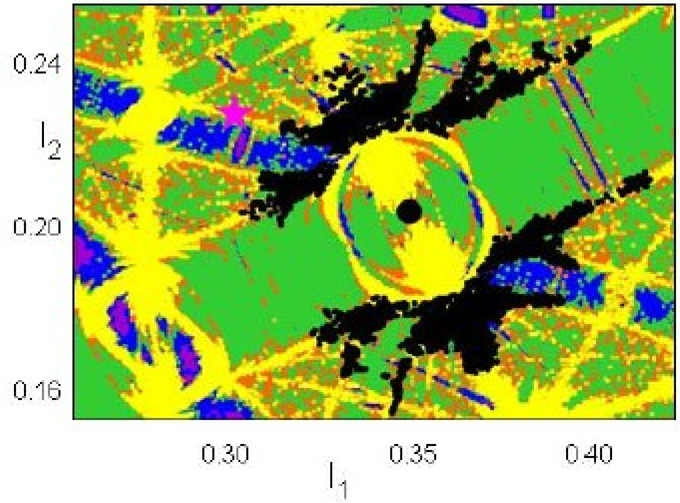
re-summed series
truncated at order 60

Διέλευση δια μέσου διπλού συντονισμού (Διάχυση Arnold)

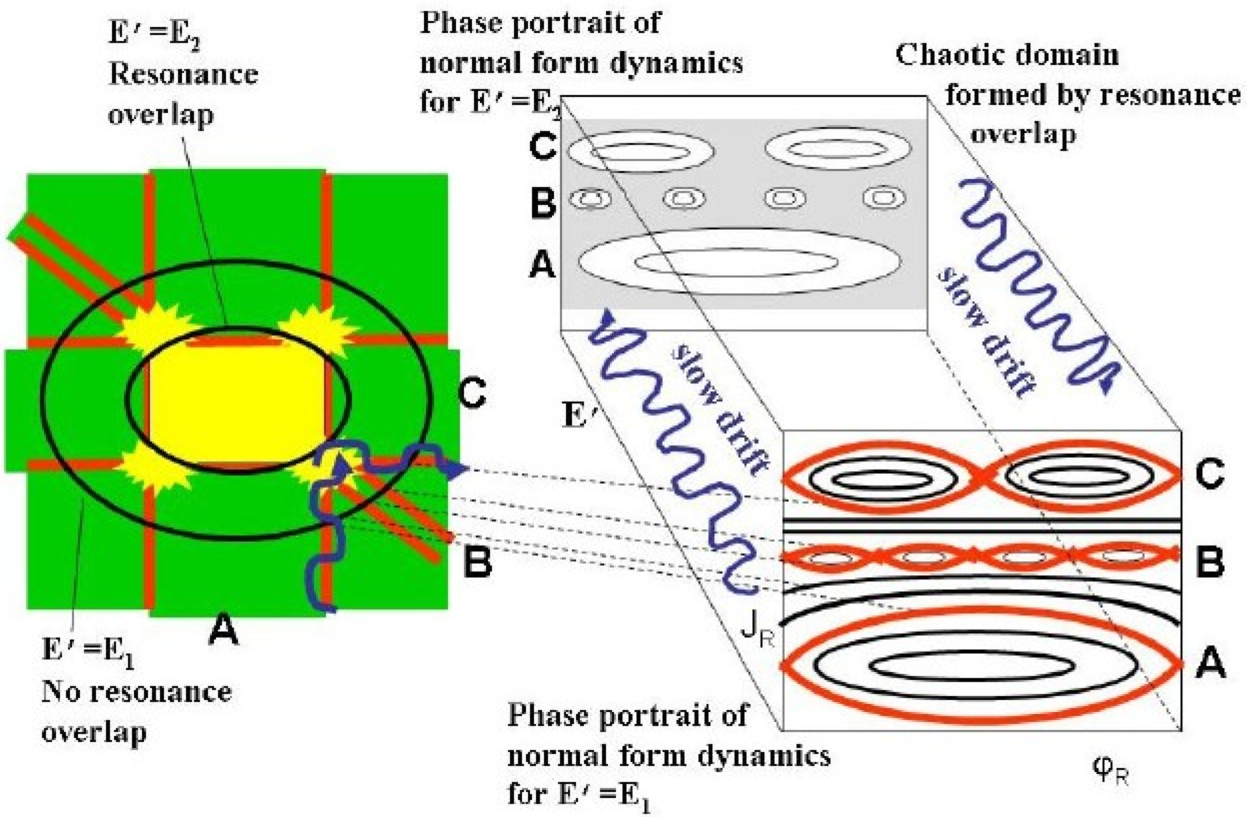


$$H = \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} + I_3 + \epsilon \frac{1}{\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) + \cos(\phi_3) + 4}$$





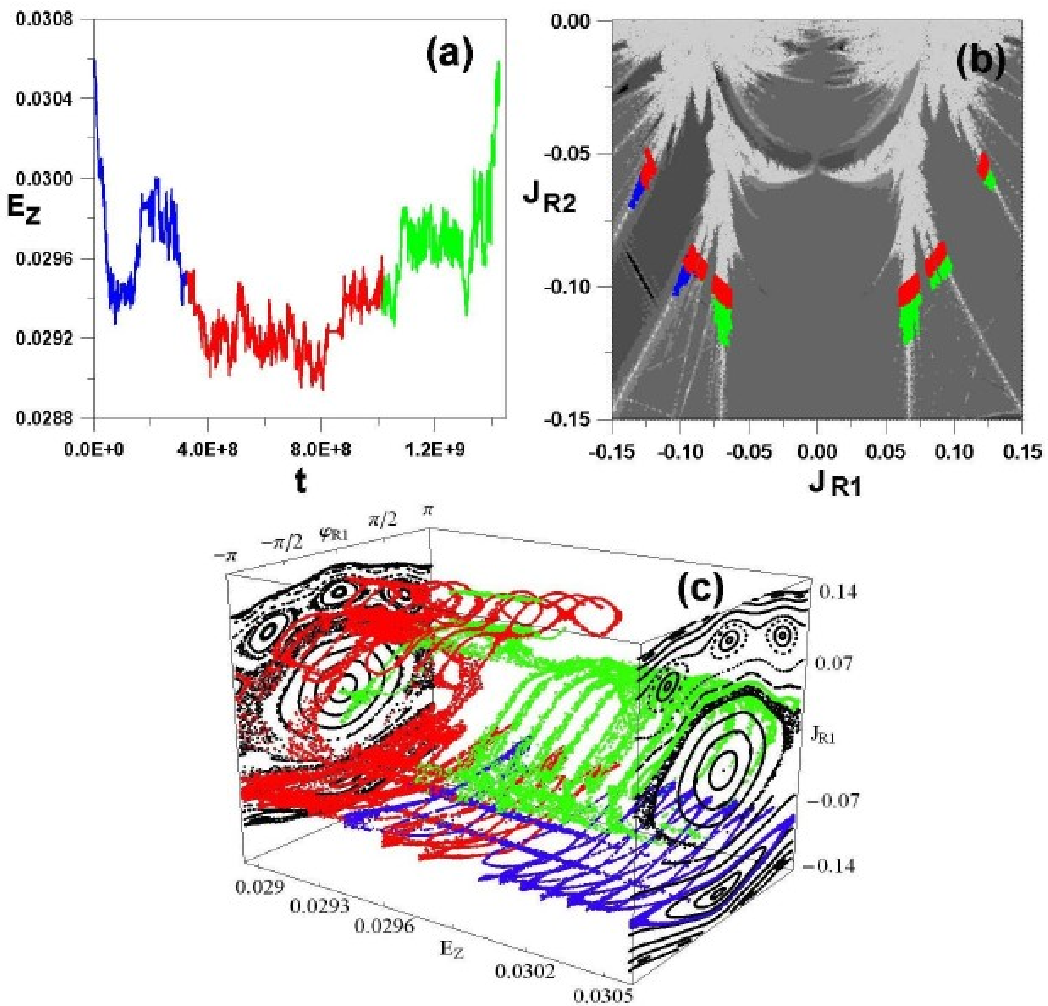
Χρήση υπολογιστικής άλγεβρας για την κατασκευή της **βέλτιστης** κανονικής μορφής Birkhoff (Efthymiopoulos 2008, 40 εκατομύρια όροι, 150 million)



Dynamics of
the doubly-resonant
normal form
+ drift

Schematic

Χρήση υπολογιστικής άλγεβρας για την κατασκευή της **βέλτιστης** κανονικής μορφής Birkhoff (Efthymiopoulos 2008, 40 εκατομύρια όροι, 150 million)



Πραγματικός αριθμητικός υπολογισμός

Phase portraits of the normal form dynamics

C. Efthymiopoulos, M. Harsoula / Physica D 251 (2013) 19–38